COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 20 JUIN 1887,

PRÉSIDENCE DE M. JANSSEN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie analytique de la chaleur.* Note de M. **H. Poincaré.**

« Les principes sur lesquels reposent les lois générales de la théorie analytique de la chaleur, pour le cas d'un corps solide quelconque, sont loin d'être établis d'une façon suffisamment rigoureuse. Sans doute, en cette matière, il serait impossible, et d'ailleurs inutile, d'exiger autant de rigueur qu'en Analyse, et même les raisonnements que je vais proposer ne seraient pas de nature à satisfaire un analyste; cependant il ne sera peut-être pas sans intérêt de perfectionner les méthodes de démonstration dont on a dû se contenter jusqu'ici.

» 1. On considère un corps solide homogène et isotrope, isolé dans un milieu indéfini à travers lequel la chaleur se propage par rayonnement. La température extérieure est o, la température du corps est V et cette fonction V est définie par les équations suivantes, où j'emploie les notations habituelles de la théorie du potentiel :

$$\frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V, \qquad \frac{dV}{dn} + hV = 0.$$

» La première de ces équations doit être satisfaite à l'intérieur du corps et la seconde à la surface. Quant à h, c'est un coefficient positif qui dépend du pouvoir émissif et que je supposerai constant.

» La solution classique de ce problème repose sur la considération d'une infinité de fonctions fondamentales U satisfaisant aux conditions

$$\Delta U + kU = 0, \qquad \frac{dU}{dn} + hU = 0, \qquad \int U^2\, d\tau = 1,$$

k étant une constante positive. Le premier point est donc d'établir l'existence de ces fonctions U. C'est ce qu'on n'a pas encore fait, que je sache, dans le cas général, et ce que je vais chercher à faire.

» 2. Soit F une fonction quelconque, et posons

$$A = \int F^2\, d\tau, \qquad B = h\int F^2\, d\omega + \int \left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right] d\tau.$$

» L'intégrale A ainsi que la seconde des intégrales de l'expression B sont étendues à tous les éléments $d\tau$ du volume du corps solide et l'intégrale $\int F^2\, d\omega$ est étendue à tous les éléments $d\omega$ de sa surface.

» Supposons que la fonction F soit assujettie à la condition $A = 1$, mais reste d'ailleurs quelconque, l'expression B qui est essentiellement positive ne pourra s'annuler; elle admettra donc un minimum absolu. Soit U_1 ce que devient F quand ce minimum est atteint; le calcul des variations nous donne

$$\frac{1}{2}\delta A = \int U_1\, \delta U_1\, d\tau = 0,$$
$$\frac{1}{2}\delta B = \int \delta U_1 \left(\frac{dU_1}{dn} + hU_1\right) d\omega - \int \Delta U_1\, \delta U_1\, d\tau = 0.$$

» On en conclut

$$\frac{dU_1}{dn} + hU_1 = 0, \qquad \Delta U_1 + k_1 U_1 = 0,$$

k_1 étant une constante. L'existence d'une des fonctions fondamentales est donc établie. Quant à k_1, il est aisé de vérifier que c'est la valeur même de B.

» On a donc, quelle que soit la fonction F,

$$k_1 < \frac{B}{A},$$

d'où il est aisé de tirer une infinité d'inégalités importantes. On trouve ainsi, par exemple, que $\frac{k_1}{h}$ est toujours plus petit que le rapport de la surface du corps solide à son volume.

» Supposons maintenant que la fonction F soit assujettie à deux conditions

$$A = \int F^2 d\tau = 1, \qquad \int FU_1 d\tau = 0.$$

» L'expression B n'en aura pas moins un minimum absolu, et, si ce minimum est atteint pour $F = U_2$, on trouve, comme plus haut,

$$\frac{dU_2}{dn} + hU_2 = 0, \qquad \Delta U_2 + k_2 U_2 + \lambda U_1 = 0,$$

k_2 et λ étant deux constantes; mais, si l'on tient compte des conditions

$$U_2 \frac{dU_1}{dn} - U_1 \frac{dU_2}{dn} = 0, \qquad \int U_1 U_2 d\tau = 0, \qquad \int U_1^2 d\tau = 1,$$

on verra sans peine que λ est nul. L'existence d'une seconde fonction fondamentale est donc démontrée.

» Si l'on impose maintenant à la fonction F les trois conditions

$$\int F^2 d\tau = 1, \qquad \int FU_1 d\tau = \int FU_2 d\tau = 0,$$

on démontrera de la même façon l'existence d'une troisième fonction U_3 et, en continuant de la sorte, on verra qu'il existe une infinité de fonctions fondamentales.

» On remarquera que cette démonstration est tout à fait analogue à celle dont se sert Riemann pour établir le principe de Dirichlet et que les analystes ont depuis remplacée par des raisonnements plus rigoureux. Je crois néanmoins que nous pouvons nous en contenter ici.

» En particulier, si $h = 0$, on trouve

$$k_1 = 0, \qquad U_1 = \text{const.}$$

» Si le corps solide est un parallélépipède rectangle et que a soit la plus grande de ses dimensions, on trouve, pour $h = 0$,

$$k_2 = \frac{\pi^2}{a^2}.$$

» 3. Soient U' et U'' deux fonctions fondamentales correspondant à deux valeurs différentes du pouvoir émissif; soient h' et h'', k' et k'' les valeurs correspondantes des coefficients h et k. On trouve

$$(h' - h'')\int U'U''\,d\omega = (k' - k'')\int U'U''\,d\tau.$$

» Si l'on suppose que U' et U'', h' et h'', k' et k'' diffèrent infiniment peu, on trouve

$$dh\int U'^2\,d\omega = dk\int U'^2\,d\tau.$$

» Cette égalité prouve que, lorsque h va en croissant, toutes les quantités $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ vont aussi en croissant.

» 4. D'après la définition de k, k_n croît avec n; je dis qu'il croît au delà de toute limite.

» D'après ce qui précède, il me suffira de le démontrer pour le cas de $h = 0$.

» Supposons d'abord que le solide considéré soit un polyèdre P, dont chaque face soit parallèle à l'un des trois plans de coordonnées. Posons

$$V = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_n,$$

les α étant des coefficients indéterminés. On trouve

$$k_n\int V^2\,d\tau > \int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]d\tau.$$

» Nous pouvons, si n est assez grand, décomposer notre polyèdre en $n-1$ parallélépipèdes rectangles. Nous pourrons ensuite disposer des coefficients α de telle façon que, pour chacun de ces $n-1$ parallélépipèdes, on ait

$$\int V\,d\tau = 0.$$

» Or, d'après la définition de k_2, si $h = 0$ et si V est une fonction quelconque, telle que

$$\int V\,d\tau = 0,$$

on a

$$\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]d\tau > k_2\int V^2\,d\tau.$$

» Si donc les trois dimensions de nos $n-1$ parallélépipèdes sont plus petites que a, on aura, pour chacun des parallélépipèdes et, par conséquent, pour le polyèdre P tout entier,

$$\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]d\tau > \frac{\pi^2}{a^2}\int V^2\,d\tau.$$

» On en déduit

$$k_n > \frac{\pi^2}{a^2}.$$

» Quand n croît indéfiniment, a tend vers o, donc k_n tend vers l'infini.

C. Q. F. D.

» Pour étendre ce résultat au cas d'un solide quelconque, il me suffira de faire observer que l'on peut toujours construire un polyèdre P, qui diffère de ce solide aussi peu que l'on veut. Je crois que, dans une question de ce genre, je puis me contenter de cet aperçu.

» 5. Le problème à résoudre consiste, étant donnée la valeur initiale F de la température V du corps solide, à trouver une fonction V_0 qui représente cette même température V à l'instant $t=t_0$, avec une erreur R aussi petite qu'on le veut. La mesure de l'erreur commise sera, par définition,

$$A' = \int (V - V_0)^2\,d\tau = \int R^2\,d\tau.$$

» Nous devons avoir, par hypothèse,

$$\frac{dV}{dt} = a^2\Delta V, \qquad \frac{dV}{dn} + hV = 0. \tag{1}$$

» La seconde de ces équations est certainement satisfaite pour toute valeur positive du temps, mais elle pourrait ne pas l'être pour $t=0$, puisque la fonction donnée F est quelconque. Nous pouvons supposer toutefois, pour éviter toute difficulté, qu'elle le soit encore pour $t=0$; car, quelle que soit F, on peut toujours trouver une fonction qui en diffère aussi peu qu'on veut et qui satisfasse à cette équation.

» Cela posé, écrivons

$$V = \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \ldots + \beta_n U_n + R.$$

» On sait que, si l'on veut déterminer les coefficients β, de telle façon que $\int R^2\,d\tau$ soit minimum, il faut prendre

$$\beta_i = \int V U_i\,d\tau.$$

» On trouve, en tenant compte des équations (1),

$$\frac{d\beta_i}{dt} = -k_i a^2 \beta_i, \qquad \text{d'où} \qquad \beta_i = \text{const.}\, e^{-k_i a^2 t}.$$

» Nous trouvons, d'autre part,

$$\frac{dA'}{dt} = 2\int R\frac{dR}{dt}\,d\tau = -2a^2 B',$$

où l'on a posé

$$B' = h\int R^2\,d\omega + \int\left[\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dz}\right)^2\right]d\tau.$$

» Mais on a

$$\int R\,U_i\,d\tau = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

» On en conclut, d'après la définition de k_{n+1},

$$B' > k_{n+1} A';$$

d'où enfin

$$A' < A'_0 e^{-2a^2 k_{n+1} t} < e^{-2a^2 k_{n+1} t}\int F^2\,d\tau,$$

A'_0 désignant la valeur initiale de A'. Cela montre que, si t est positif, on peut prendre n assez grand pour que A' soit aussi petit que l'on veut.

C. Q. F. D.

» 6. Posons, en désignant toujours par V la température,

$$A = \int V^2\,d\tau, \qquad B = -\int V\Delta V\,d\tau.$$

» Il viendra

$$\frac{dA}{dt} = -2a^2 B, \qquad \frac{dB}{dt} = -2a^2\int(\Delta V)^2\,d\tau$$

et

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} = -a^2\int\int(V\Delta V' - V'\Delta V)^2\,d\tau\,d\tau'.$$

» Pour calculer l'intégrale du second membre, il faut effectuer deux intégrations : la première par rapport à $d\tau$, la seconde par rapport à $d\tau'$, et étendre chacune d'elles à tous les éléments du volume du corps solide. D'ailleurs V et V' désignent respectivement la température dans l'élément $d\tau$ et dans l'élément $d\tau'$.

» Ces égalités prouvent que A et $\frac{A}{B}$ vont constamment en décroissant. »

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur l'emploi des manomètres à écrasement pour la mesure des pressions développées par les substances explosives.* Note de MM. **Sarrau** et **Vieille**.

« 1. Nous avons étudié dans de précédentes Communications (¹) les conditions de l'emploi du manomètre à écrasement, dit *crusher*, pour la mesure des pressions développées par les explosifs.

» On sait que l'on observe avec ce manomètre l'écrasement d'un petit cylindre de cuivre rouge placé entre une enclume fixe et la tête d'un piston dont la base, de section connue, reçoit l'action des gaz.

» Ce manomètre suppose l'emploi d'une *table de tarage* ou table de corrélation entre la valeur d'une force connue agissant suivant un mode déterminé et la grandeur de l'écrasement que cette force produit.

» L'élément le plus important que l'on se propose d'évaluer avec cet appareil est la *pression maximum* produite par un explosif dans des conditions données d'expérience, et la difficulté consiste à déterminer le mode suivant lequel cette évaluation doit s'opérer, à l'aide de la table de tarage, d'après l'écrasement mesuré.

» 2. Nous avons tout d'abord défini d'une façon précise les conditions du tarage et adopté un mode spécial, dit *statique*, dans lequel il y a équilibre, à la fin de l'écrasement, entre la force appliquée et la résistance du cylindre, de sorte que la table de tarage n'est autre que la table des résistances que le cylindre oppose au piston pour les diverses valeurs de l'écrasement (²).

» Nous avons signalé ensuite deux cas limites dans lesquels la pression

(¹) *Comptes rendus*, t. XCV, p. 26, 130 et 180; t. CII, p. 1054.

(²) Nous avons vérifié que la résistance opposée par le cylindre au mouvement du piston dépendait seulement, pour chacun des écrasements successifs qui se produisent, de la valeur de cet écrasement et non des autres circonstances du mouvement.