1886BuAsI...3..521P

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR UN MOYEN D'AUGMENTER LA CONVERGENCE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR H. POINCARÉ.

M. Gyldén a donné, dans les *Astronomische Nachrichten,* un moyen d'augmenter la convergence des séries trigonométriques, et M. Callandreau a appliqué cette méthode au calcul des perturbations d'Héra. Dans l'un des derniers numéros du *Bulletin astronomique* (III, p. 378), M. Charlier, assistant à l'observatoire d'Upsal, a repris la même question. La lecture de son travail m'a inspiré quelques réflexions, qu'il ne sera peut-être pas inutile de publier.

Soit une série trigonométrique

$$\Sigma A_m \sin mx + \Sigma B_m \cos mx.$$

Nous dirons, pour abréger, que la convergence de cette série est d'ordre p si l'on a, en désignant d'une manière générale par $|X|$ la valeur absolue du nombre X,

$$|m^p A_m| \leqq K, \qquad |m^p B_m| \leqq K,$$

K étant une quantité positive indépendante de m.

Soit maintenant une fonction $f(x)$ périodique et de période 2π. Je suppose qu'elle soit finie et continue, ainsi que toutes ses dérivées pour toutes les valeurs de x comprises entre o et 2π, sauf pour un nombre fini de valeurs exceptionnelles.

Je dirai que la fonction $f(x)$ présente, pour une valeur donnée de x, une discontinuité d'ordre p, si, dans le voisinage de cette valeur, la fonction et ses $p-2$ premières dérivées sont finies et continues, et si la $(p-1)^{\text{ième}}$ dérivée est finie, mais discontinue.

Soit alors $f(x) = \Sigma A_m \sin mx + \Sigma B_m \cos mx$.

Je dis que, si la fonction $f(x)$ ne présente que des discontinuités d'ordre p, elle sera représentée par une série trigonométrique dont la convergence sera d'ordre p.

Je vais démontrer d'abord que cette convergence sera au moins d'ordre $p-1$, et pour cela je commencerai par examiner le cas

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1886BuAsI...3..521P

où la fonction $f(x)$ n'a que des discontinuités du second ordre. Cela veut dire qu'elle a une dérivée finie, mais discontinue. Supposons donc que sa dérivée soit toujours plus petite que K en valeur absolue. On aura alors, quel que soit h,

$$|f(x+h)-f(x)| < |\mathrm{K}h|.$$

Or

$$f(x+h)-f(x) = \Sigma \mathrm{A}_m \sin mh \cos mx + 2\Sigma \mathrm{A}_m \sin^2 \frac{mh}{2} \sin mx$$
$$- 2\Sigma \mathrm{B}_m \sin^2 \frac{mh}{2} \cos mx - \Sigma \mathrm{B}_m \sin mh \sin mx.$$

Or, une propriété bien connue des séries trigonométriques, c'est que tout coefficient est plus petit en valeur absolue que le double du maximum de la valeur absolue de la fonction représentée. En appliquant ce théorème à la fonction $f(x+h)-f(x)$, on obtient

$$\left|\mathrm{A}_m \sin mh - 2\mathrm{B}_m \sin^2 \frac{mh}{2}\right| < |2\mathrm{K}h|,$$
$$\left|2\mathrm{A}_m \sin^2 \frac{mh}{2} + \mathrm{B}_m \sin mh\right| < |2\mathrm{K}h|$$

ou, en divisant par mh,

$$\left|\mathrm{A}_m \frac{\sin mh}{mn} - \mathrm{B}_m \frac{2\sin^2 \frac{mh}{2}}{mh}\right| < \left|\frac{2\mathrm{K}}{m}\right|$$
$$\left|\mathrm{A}_m \frac{2\sin^2 \frac{mh}{2}}{mh} + \mathrm{B}_m \frac{\sin mh}{mh}\right| < \left|\frac{2\mathrm{K}}{m}\right|.$$

Cela est vrai quel que soit h. Or, si l'on fait tendre h vers o, les premiers membres tendent respectivement vers A_m et B_m; on a donc

$$|m\mathrm{A}_m| \leqq |2\mathrm{K}|, \qquad |m\mathrm{B}_m| \leqq |2\mathrm{K}|. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si maintenant $f(x)$ ne présente que des discontinuités d'ordre p, sa dérivée d'ordre $p-2$ n'aura que des discontinuités d'ordre 2. Or, cette dérivée s'écrit

$$\Sigma m^{p-2} \mathrm{A}_m \sin\left[mx + (p-2)\frac{\pi}{2}\right] + \Sigma m^{p-2} \mathrm{B}_m \cos\left[mx + (p-2)\frac{\pi}{2}\right].$$

Cette dérivée n'ayant que des discontinuités du second ordre, sa

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1886BuAsI...3..521P

convergence doit être au moins du premier ordre, c'est-à-dire que l'on a

$$|m^{p-1}A_m| \leqq |2K|, \qquad |m^{p-1}B_m| \leqq |2K|.$$

Ces inégalités expriment que la série qui représente $f(x)$ a une convergence d'ordre $p-1$ au moins.

Je vais maintenant démontrer que cette convergence est d'ordre p.

Pour cela, je vais me proposer le problème suivant :

Construire une fonction périodique qui admette des discontinuités données.

Premier cas. — Les discontinuités sont du premier ordre.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n valeurs de x classées par ordre de grandeur croissante et comprises entre o et 2π. Ce seront les valeurs pour lesquelles la fonction à construire $\varphi(x)$ devra être discontinue. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les sauts que devra subir la fonction $\varphi(x)$ quand x passera par ces diverses valeurs. On aura alors

$$\lim[\varphi(\alpha_i+\varepsilon)-\varphi(\alpha_i-\varepsilon)] = \beta_i,$$

quand ε tendra vers o par valeurs positives.

Soit enfin β_{n+1} le saut que subira la fonction φ quand x passera par les valeurs o ou 2π, de telle sorte que

$$\lim[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)] = \beta_{n+1}$$

(β_{n+1} pourra être nul si la fonction est continue pour $x=0$).

Telles sont les données de la question. Comme on doit avoir

$$\varphi(x+2\pi) = \varphi(x),$$

il suffira de construire $\varphi(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre o et 2π. Nous prendrons

$$\begin{array}{lll}
\text{Entre } 0 & \text{et } \alpha_1 & \ldots\ \varphi(x) = \lambda x + h, \\
\text{Entre } \alpha_1 & \text{et } \alpha_2 & \ldots\ \varphi(x) = \lambda x + h + \beta_1, \\
\text{Entre } \alpha_2 & \text{et } \alpha_3 & \ldots\ \varphi(x) = \lambda x + h + \beta_1 + \beta_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\text{Entre } \alpha_{n-1} & \text{et } \alpha_n & \ldots\ \varphi(x) = \lambda x + h + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1}, \\
\text{Entre } \alpha_n & \text{et } 2\pi & \ldots\ \varphi(x) = \lambda x + h + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} + \beta_n.
\end{array}$$

On doit d'ailleurs avoir

$$\lambda = -\frac{1}{2\pi}(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + \beta_{n+1}).$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1886BuAsI...3..521P

Il est clair que la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions que nous nous sommes imposées.

On pourra la développer en série trigonométrique

$$\varphi(x) = \Sigma A_m \sin mx + \Sigma B_m \cos mx.$$

Il est aisé de constater, par un calcul direct, que la convergence de cette série est du premier ordre (et non pas du second ordre).

Nous choisirons la constante h, de telle façon que B_0 soit nul.

Deuxième cas. — Les discontinuités sont d'ordre p.

Nous voulons construire une fonction $\varphi_p(x)$ qui admette des discontinuités données d'ordre p. Cela veut dire que la dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$ de cette fonction doit avoir des discontinuités données de premier ordre.

D'après ce qui précède, on pourra toujours construire une fonction

$$\varphi(x) = \Sigma A_m \sin mx + \Sigma B_m \cos mx :$$

1° Qui admet les discontinuités du premier ordre que nous imposons à la dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$ de $\varphi(x)$;

2° Qui soit telle que $B_0 = 0$;

3° Qui soit représentée par une série dont la convergence soit du premier ordre. Nous ferons alors

$$\varphi_p(x) = \sum \frac{A_m}{m^{p-1}} \sin\left[mx - (p-1)\frac{\pi}{2}\right] + \sum \frac{B_m}{m^{p-1}} \cos\left[mx - (p-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Cette fonction aura $\varphi(x)$ pour dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$. Elle satisfera donc aux conditions du problème; de plus elle sera représentée par une série convergente d'ordre p (et non pas d'ordre $p+1$).

Cela posé, reprenons notre fonction $f(x)$ dont les discontinuités sont d'ordre p, et la série qui la représente. Je dis que la convergence de cette série sera d'ordre p. En effet, nous pourrons construire une fonction périodique $\varphi_p(x)$, offrant les mêmes discontinuités d'ordre p que $f(x)$ et qui sera représentée par une série convergente d'ordre p (et non pas d'ordre $p+1$).

Alors la différence $f(x) - \varphi_p(x)$ n'aura plus que des discontinuités d'ordre $p+1$, et sera donc représentée par une série dont la convergence sera au moins d'ordre p.

Or, il en est de même de $\varphi_p(x)$.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1886BuAsI...3..521P

Il en sera donc encore de même de $f(x)$. C. Q. F. D.

Je dis maintenant que la série qui représente $f(x)$ ne peut pas avoir une convergence d'ordre $p+1$.

En effet, la différence $f(x) - \varphi_p(x)$, n'ayant que des discontinuités d'ordre $p+1$, sera représentée par une série convergente d'ordre $p+1$. Si donc il en était de même de $f(x)$, il en serait encore de même de $\varphi_p(x)$, ce qui n'a pas lieu.

Donc la convergence de la série qui représente $f(x)$ est du $p^{\text{ième}}$ ordre [et non pas du $(p+1)^{\text{ième}}$ ordre]. C. Q. F. D.

On peut appliquer les principes qui précèdent au problème de M. Gyldén. Ce problème consiste, comme on l'a vu, à trouver une série trigonométrique dont la convergence soit d'ordre p et qui représente une fonction $f(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre o et π. Je supposerai que cette fonction $f(x)$ soit finie et continue ainsi que toutes ses dérivées.

Imaginons donc une nouvelle fonction $\varphi(x)$ qui soit également finie et continue ainsi que toutes ses dérivées, mais qui est d'ailleurs complètement arbitraire. Il existera une série trigonométrique

$$\Sigma A_m \sin mx + \Sigma B_m \cos mx,$$

qui représentera $f(x)$ quand x est compris entre o et π, et $\varphi(x)$ quand x est compris entre $-\pi$ et o. Il suffit pour cela de faire

$$2\pi B_0 = \int_0^\pi f(x)\,dx + \int_{-\pi}^0 \varphi(x)\,dx,$$

$$\pi B_m = \int_0^\pi f(x)\cos mx\,dx + \int_{-\pi}^0 \varphi(x)\cos mx\,dx,$$

$$\pi A_m = \int_0^\pi f(x)\sin mx\,dx + \int_{-\pi}^0 \varphi(x)\sin mx\,dx.$$

Il s'agit de choisir la fonction arbitraire $\varphi(x)$ de telle façon que la série soit convergente d'ordre p.

Or, d'après les principes exposés plus haut, il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$f(o) = \varphi(o), \quad f'(o) = \varphi'(o), \quad f''(o) = \varphi''(o), \quad \ldots,$$
$$f^{(p-1)}(o) = \varphi^{(p-1)}(o),$$

$$f(\pi) = \varphi(-\pi), \quad f'(\pi) = \varphi'(-\pi), \quad f''(\pi) = \varphi''(-\pi), \quad \ldots,$$
$$f^{(p-1)}(\pi) = \varphi^{(p-1)}(-\pi),$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1886BuAsI...3..521P

$f', f'', \ldots, f^{(p-1)}$ désignant les dérivées successives de f, et $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(p-1)}$ celles de φ.

On peut évidemment satisfaire à ces conditions d'une infinité de manières. La fonction $\varphi(x)$ reste arbitraire dans une large mesure. Cette fonction et ses $p-1$ premières dérivées sont seulement assujetties à prendre des valeurs déterminées pour $x=0$ et pour $x=-\pi$.

Appliquons les principes qui précèdent au cas particulier dont s'est occupé M. Charlier, c'est-à-dire au cas où

$$f(x)=x.$$

Il s'agit de développer la fonction x en une série de la forme

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos mx + \sum_{n=}^{2r} 2\beta_n \sin nx.$$

Cela revient à prendre

$$\varphi(x) = -x + \sum_{n=1}^{2r} 4\beta_n \sin nx.$$

Cela posé, écrivons les conditions pour que la convergence soit d'ordre p :

$$\begin{array}{ll}
1 = -1 + \Sigma 4n\beta_n, & 1 = -1 + \Sigma 4n\beta_n(-1)^n, \\
0 = \Sigma 4n^3\beta_n, & 0 = \Sigma 4n^3(-1)^n\beta_n, \\
0 = \Sigma 4n^5\beta_n, & 0 = \Sigma 4n^5(-1)^n\beta_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 = \Sigma 4n^q\beta_n, & 0 = \Sigma 4n^q(-1)^n\beta_n,
\end{array}$$

où q est le plus grand entier impair qui ne dépasse pas p.

Le nombre des inconnues, les β_n, est de $2r$; pour que le nombre des équations soit égal à celui des inconnues, il suffit de prendre

$$p=2r, \qquad q=2r-1.$$

Les équations nous donnent alors

$$\sum_{n=1}^{n=r} 4(2n-1)^h \beta_{2n-1} = 0, \qquad (h=1, 3, 5, \ldots, 2r-1),$$

d'où l'on tire

$$\beta_{2n-1} = 0, \qquad (n=1, 2, \ldots, r).$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1886BuAsI...3..521P

Il vient ensuite

$$2 = \sum_{n=1}^{r} 4(2n)\beta_{2n},$$

$$0 = \sum_{n=1}^{r} 4(2n)^h \beta_{2n}, \qquad (h = 3, 5, \ldots, 2r-1),$$

d'où l'on peut tirer les valeurs des r coefficients restants

$$\beta_2, \beta_4, \ldots, \beta_{2r}.$$

On verrait aisément que l'on retombe sur les valeurs trouvées par M. Gyldén et par M. Charlier.

Passons maintenant au cas général, et soit une fonction quelconque $f(x)$ qu'il s'agit de représenter entre o et π par une série de la forme

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos mx + \sum_{n=1}^{2r} 2\beta_n \sin nx,$$

et dont la convergence soit d'ordre p. Nous prendrons encore ici $p = 2r$. Cela revient à faire

$$\varphi(x) = f(-x) + \Sigma 4\beta_n \sin nx.$$

Nous serons ainsi conduits aux équations suivantes :

$$\begin{array}{rl} f'(0) = 2\Sigma n\beta_n, & f'(\pi) = 2\Sigma n(-1)^n\beta_n, \\ -f'''(0) = 2\Sigma n^3\beta_n, & -f'''(\pi) = 2\Sigma n^3(-1)^n\beta_n, \\ f^{\text{v}}(0) = 2\Sigma n^5\beta_n, & f^{\text{v}}(\pi) = 2\Sigma n^5(-1)^n\beta_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \pm f^{(p-1)}(0) = 2\Sigma n^{(p-1)}\beta_n, & \pm f^{(p-1)}(\pi) = 2\Sigma n^{p-1}(-1)^n\beta_n. \end{array}$$

On tirera de ces équations les $2r$ coefficients,

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2r},$$

en fonctions linéaires des $2r$ quantités,

$$\begin{array}{lllll} f'(0), & f'''(0), & f^{\text{v}}(0), & \ldots, & f^{(p-1)}(0), \\ f'(\pi), & f'''(\pi), & f^{\text{v}}(\pi), & \ldots, & f^{(p-1)}(\pi). \end{array}$$

Il est clair, d'ailleurs, que la solution précédente, qui contient celle de M. Gyldén, peut être variée à l'infini, puisque la fonction $\varphi(x)$ reste presque complètement arbitraire.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1886BuAsI...3..521P

Qu'on me permette une dernière remarque au sujet de l'application que M. Callandreau a faite des méthodes de M. Gyldén. Rappelons d'abord sommairement en quoi consiste cette application. On prend pour variable indépendante x l'anomalie excentrique de la planète troublée; et l'on exprime les diverses quantités qui s'introduisent dans le calcul en fonction de cette variable. Soit $F(x)$ une de ces quantités; ce sera une fonction finie et continue ainsi que toutes ses dérivées. On exprime ensuite x par la série de M. Gyldén,

$$x = \Sigma A_m \cos mx + \Sigma B_m \sin mx,$$

dont la convergence est d'ordre p.

La somme $f(x)$ de cette série sera une fonction périodique, finie et continue ainsi que ses $p - 1$ premières dérivées, et qui se confondra avec x dans l'intervalle $0 - \pi$.

M. Callandreau développe ensuite $F[f(x)]$ en séries trigonométriques dont la somme est $F(x)$ dans l'intervalle $0 - \pi$.

Il se trouve que la convergence de ces séries est encore d'ordre p.

Le succès de cette méthode s'explique aisément grâce aux propositions que je viens de démontrer. Si, en effet, $f(x)$ est finie et continue ainsi que ses $p - 1$ premières dérivées, il est clair qu'il en sera de même de $F[f(x)]$.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES COORDONNÉES ELLIPTIQUES;

Par M. O. CALLANDREAU.

Laplace a montré, le premier (*Mécanique céleste,* supplément au t. V), que les séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité et les cosinus ou sinus de l'anomalie moyenne, qui représentent le rayon vecteur et l'anomalie vraie, sont convergentes, abstraction faite des signes, en d'autres termes absolument convergentes, tant que l'excentricité est inférieure à la limite $e = 0,6627\ldots$.

Plus tard, la même valeur limite a été déduite de la théorie de la série de Lagrange pour le cas des variables imaginaires (Cauchy; MM. V. Puiseux, Serret, Tchebichef, Rouché).

Il n'est peut-être pas superflu de vérifier qu'on a bien ainsi la réponse à la question telle que Laplace l'avait posée, c'est-à-dire

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System