MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR UNE MÉTHODE DE M. LINDSTEDT;

PAR M. H. POINCARÉ.

L'équation suivante

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \alpha(x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots + x^p\varphi_p), \tag{1}$$

où α est très petit et où φ_1, φ_2, ..., φ_p sont des sommes de termes trigonométriques en t, a été l'objet de travaux nombreux et approfondis, parmi lesquels je citerai une méthode d'intégration de M. Lindstedt (*Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie,* Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg, t. XXXI, n° 4; analysé dans le *Bulletin astronomique,* I, p. 302). Je demanderai la permission de rappeler brièvement cette méthode, en la présentant sous une forme particulière.

Posons

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha^q x_q, \tag{2}$$

x_0, x_1, ..., x_q étant des sommes de termes de la forme suivante :

$$A\cos(mw + \lambda t + h).$$

Dans cette expression, m est un entier et w est une variable auxiliaire égale à

$$w = \mu t + \varpi,$$

où ϖ est une constante d'intégration et où

$$\mu = \mu_0 + \alpha\mu_1 + \ldots + \alpha^q\mu_q.$$

Je dis qu'il sera possible de choisir les fonctions trigonométriques x_0, x_1, ..., x_q et les constantes μ_0, μ_1, ..., μ_q, de telle sorte que, si l'on substitue dans l'équation (1) la valeur (2) de x, la différence des deux membres de cette équation contienne en facteur α^{q+1}, ou, en d'autres termes, que cette équation soit satisfaite aux termes près d'ordre $q+1$, α étant du premier ordre.

En effet, on trouve d'abord aisément

$$x_0 = \cos w, \qquad \mu_0 = n.$$

Écrivons maintenant l'équation (1) sous la forme suivante, en mettant en évidence les dérivées partielles de x par rapport à t et à w,

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} + 2\mu \dfrac{d^2 x}{dt\, dw} + \mu^2 \dfrac{d^2 x}{dw^2} + n^2 x \\ \qquad = \alpha(x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots + x^p \varphi_p) = \alpha \mathrm{F}. \end{cases}$$

Si dans F nous remplaçons x par sa valeur (2), nous pourrons développer cette fonction F suivant les puissances de α, et il viendra

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + \alpha \mathrm{F}_1 + \alpha^2 \mathrm{F}_2 + \ldots.$$

Il est clair que F_0 dépendra seulement de x_0, F_1 de x_0 et de x_1, F_2 de x_0, x_1 et x_2, ... Posons

$$\mu^2 = \nu_0 + \alpha\nu_1 + \alpha^2 \nu_2 + \ldots.$$

Ici encore ν_0 dépendra de μ_0, ν_1 de μ_0 et μ_1, ...

Posons encore, pour abréger,

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dt^2} + 2n \frac{d^2 u}{dt\, dw} + n^2 \frac{d^2 u}{dw^2} + n^2 u,$$

$$\mathrm{A}_{i,k} = 2\mu_i \frac{d^2 x_k}{dt\, dw} + \nu_i \frac{d^2 x_k}{dw^2},$$

$$\mathrm{B}_k = \mathrm{A}_{1,k-1} + \mathrm{A}_{2,k-2} + \ldots + \mathrm{A}_{k-1,1}.$$

Nous aurons alors, pour déterminer successivement les x et les μ, la suite d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta x_1 - \nu_1 \cos w &= \mathrm{F}_0, \\ \Delta x_2 + \mathrm{B}_2 - \nu_2 \cos w &= \mathrm{F}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ \Delta x_k + \mathrm{B}_k - \nu_k \cos w &= \mathrm{F}_{k-1}. \end{aligned}$$

Si x_0, x_1, ..., x_{k-1} sont connus ainsi que μ_0, μ_1, ..., μ_{k-1} ; on connaît F_{k-1} et B_k qui sont des séries trigonométriques. On déterminera ensuite μ_k et par conséquent ν_k, de telle façon que l'équation

$$\Delta x_k = \mathrm{F}_{k-1} + \nu_k \cos w - \mathrm{B}_k$$

puisse être satisfaite par une série trigonométrique x_k.

Telle est la méthode très simple de M. Lindstedt. Il est aisé de voir comment il faut déterminer ν_k; en effet, pour que l'équation

$$\Delta u = \mathrm{W},$$

où le second membre est une série trigonométrique en t et ϖ puisse être satisfaite par une série trigonométrique u, il faut et il suffit que W ne contienne ni terme en $\cos\varpi$, ni terme en $\sin\varpi$. Or nous pouvons disposer de ν_k, de façon à détruire les termes en $\cos\varpi$; mais nous ne pourrions pas de même détruire les termes en $\sin\varpi$, s'il y en avait dans $\mathrm{F}_{k-1} - \mathrm{B}_k$.

On voit immédiatement qu'on ne peut en rencontrer dans les premières approximations; mais il n'est pas évident qu'il en serait de même dans les approximations suivantes. Aussi M. Lindstedt croyait-il que sa méthode n'était applicable jusqu'au bout que s'il n'existait aucune relation linéaire à coefficients entiers entre les coefficients du temps dans les divers termes de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$. Cette restriction, qui serait très gênante, est inutile; je vais le démontrer en m'appuyant sur le théorème de Green. Pour cela, je supposerai d'abord que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ne contiennent qu'un seul argument, c'est-à-dire (en choisissant convenablement l'unité de temps) que

$$\varphi_k = \Sigma \mathrm{A} \cos(mt + h) \qquad (m \text{ étant entier}),$$

$$\varphi_k(t + 2\pi) = \varphi_k(t).$$

Posons

$$y = \frac{dx}{dt}, \qquad z = t,$$

et regardons x, y et z comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Posons encore

$$\mathrm{X} = y, \qquad \mathrm{Y} = -n^2 x + \alpha(x\varphi_1 + \ldots + x^p p_p), \qquad \mathrm{Z} = 1.$$

Soit S une surface fermée quelconque, $d\omega$ l'élément de cette surface, a, b, c les cosinus directeurs de la normale. Le théorème de Green nous donnera

$$\int_{\mathrm{S}} (\mathrm{X}a + \mathrm{Y}b + \mathrm{Z}c)\, d\omega = 0,$$

car on voit aisément qu'on a

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz} = 0.$$

Revenons à la méthode de M. Lindstedt et supposons qu'après avoir conduit avec succès les k premières approximations, on soit arrêté à la $(k+1)^{\text{ème}}$ par la présence d'un terme $S \sin w$ dans $F_{k-1} - B_k$. Nous résoudrons alors l'équation

$$\Delta x'_k = F_{k-1} + \nu_k \cos w - B_k - S \sin w,$$

en choisissant ν_k de façon à détruire les termes en $\cos w$ dans le second membre. Alors x'_k sera une série trigonométrique en t et w. Posons maintenant

$$x = f(t, w) = x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha^{k-1} x_{k-1} + \alpha^k x'_k,$$

$$y = \psi(t, w) = \frac{df}{dt} + \mu \frac{df}{dw}, \qquad z = t.$$

Si nous faisons parcourir à t et à w toutes les valeurs comprises entre 0 et 2π, le point x, y, z parcourra une certaine surface Σ; cette surface ne sera pas fermée, mais elle sera limitée aux deux plans $z = 0$, $z = 2\pi$. Pour achever d'enclore un volume, il faudra adjoindre à la surface Σ une portion de chacun de ces deux plans; nous aurons alors une sorte de cylindre, avec sa surface latérale Σ, sa base B dans le plan $z = 0$, et sa base B' dans le plan $z = 2\pi$. L'intégrale

$$\int (Xa + Yb + Zc)\, d\omega,$$

étendue à la surface totale de cette sorte de cylindre, devra être nulle. Mais les intégrales relatives aux deux bases se détruisent, puisque x et y sont des fonctions périodiques de t avec la période $2w$; donc l'intégrale étendue à la surface Σ est nulle.

Évaluons cette intégrale d'une autre façon.

Posons, pour abréger,

$$\frac{1}{M} = \left(\frac{df}{dw}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dw}\right)^2 + \left(\frac{df}{dt}\frac{d\psi}{dw} - \frac{df}{dw}\frac{d\psi}{dt}\right)^2,$$

d'où

$$a = -M\frac{d\psi}{dw}, \qquad b = M\frac{df}{dw}, \qquad c = M\left(\frac{df}{dt}\frac{d\psi}{dw} - \frac{df}{dw}\frac{d\psi}{dt}\right).$$

Il viendra alors

$$Xa + Yb + Zc = \frac{df}{dw}\left(Y - \frac{d^2f}{dt^2} - 2\mu\frac{d^2f}{dt\,dw} - \mu^2\frac{d^2f}{dw^2}\right)M$$

avec

$$Y = -n^2 f + \alpha(f\varphi_1 + f^2\varphi_2 + \ldots + f^p\varphi_p).$$

Si l'on développe $Xa + Yb + Zc$ suivant les puissances croissantes de α, il viendra

$$Xa + Yb + Zc = -\alpha^k M_0 S \sin^2 w + \alpha^{k+1}\theta_1 + \alpha^{k+2}\theta_2 + \ldots,$$

où θ_1, $\theta_2, \ldots$ sont des séries trigonométriques qu'il est inutile de déterminer davantage, et où

$$M_0 = \frac{1}{\sin^2 w + n^2 \cos^2 w}$$

est le premier terme du développement de M suivant les puissances de α.

Notre intégrale devant être nulle, quel que soit α, les coefficients des diverses puissances de α dans le développement de cette intégrale devront être nuls, et ce sera vrai, en particulier, du coefficient de α_k; on devra donc avoir

$$\int M_0 S \sin^2 w \, d\omega = 0,$$

et, comme $M_0 \sin^2 w$ est essentiellement positif, cela ne peut avoir lieu que si S est nul. Donc, dans la méthode de M. Lindstedt, aucune des approximations n'introduira de terme en $\sin w$; donc la méthode n'est jamais en défaut.

J'ai supposé, il est vrai, que les séries trigonométriques φ_1, $\varphi_2, \ldots$ ne contenaient qu'un seul argument; mais il est aisé d'étendre le résultat au cas général. Si, en effet, il y en avait deux par exemple et que les termes des φ fussent de la forme

$$A \cos(m\beta t + n\gamma t + h),$$

m et n étant entiers et β et γ deux constantes, et s'il s'introduisait un terme $S \sin w$ à la $k^{\text{ième}}$ approximation, S devrait être une fonction continue de β et de γ; mais cette fonction est nulle si $\frac{\beta}{\gamma}$ est commensurable, c'est-à-dire si les deux arguments se réduisent à un seul; elle est donc toujours nulle.

La même analyse pourrait s'étendre aux équations plus générales considérées par M. Lindstedt, mais j'ai à peine besoin de dire que la question de convergence est toujours réservée.