M. **Brown-Sequard** adresse ses remercîments à l'Académie, pour la distinction dont ses travaux ont été l'objet dans la dernière séance annuelle.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions abéliennes.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Dans une Communication que j'ai eu l'honneur de faire à l'Académie, le 18 avril 1881, et dans un travail plus étendu, inséré au Tome XI du *Bulletin de la Société mathématique de France,* j'ai donné une formule pour déterminer le nombre des zéros communs à p fonctions Θ à p variables.

» Appelons fonction Θ d'ordre m une fonction entière de p variables x_1, x_2, ..., x_p qui ne change pas quand on augmente ces variables d'une des p premières périodes et qui se multiplie respectivement par les facteurs

$$(1) \qquad e^{-mx_1+\delta_1},\ e^{-mx_2+\delta_2},\ \ldots,\ e^{-mx_p+\delta_p}$$

quand les variables augmentent d'une des p dernières périodes. Les quantités (1) s'appelleront les multiplicateurs.

» Si l'on considère p fonctions $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_p$ d'ordres $m_1, m_2, \ldots, m_p$, les équations

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \ldots = \Theta_p = 0$$

admettront

$$N = p!\, m_1 m_2 \ldots m_p$$

solutions distinctes (c'est-à-dire non congruentes).

» Soient X_1 la somme des N valeurs de x_1, X_2 la somme des N valeurs de x_2, ..., X_p la somme des N valeurs de x_p qui satisfont à ces p équations. Il y a moyen de calculer X_i.

» Soit

$$e^{-m_i x_k+\delta_{ik}}$$

le $k^{\text{ième}}$ multiplicateur de la fonction Θ_i. On trouvera

$$X_i \equiv F_i,$$

F_i étant un polynôme du premier degré par rapport aux δ_{ik} et dont les coefficients dépendent des quantités $m_1, m_2, \ldots, m_p$ et des périodes. F_i sera aussi un polynôme du premier degré par rapport à chacune des quantités m considérées séparément et par rapport aux périodes.

» Supposons $p = 2$ pour fixer les idées; appelons les périodes, pour plus de symétrie,

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix}.$$

» Envisageons, toujours pour la symétrie, au lieu des fonctions Θ, des fonctions φ plus générales, analogues aux fonctions intermédiaires de MM. Briot et Bouquet, et définies par les quatre identités

$$\varphi(x_1 + a_i, x_2 + b_i) = \varphi(x_1, x_2) e^{\alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

» Posons ensuite

$$\begin{aligned} \delta_i &= \gamma_i - \tfrac{1}{2}(\alpha_i a_i + \beta_i b_i), \\ M_{ij} &= a_i \alpha_j - a_j \alpha_i + b_i \beta_j - b_j \beta_i, \\ \Gamma_1 &= a_3 \delta_1 - a_1 \delta_3 + a_4 \delta_2 - a_2 \delta_4, \\ \Gamma_2 &= b_3 \delta_1 - b_1 \delta_3 + b_4 \delta_2 - b_2 \delta_4. \end{aligned}$$

Les quantités M et Γ peuvent être regardées comme des invariants, c'est-à-dire qu'elles ne changent pas quand on multiplie la fonction φ par une exponentielle

$$e^{\lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2 + hx + ky}.$$

» On devra avoir

$$(2) \qquad \Sigma M_{ij} y_i z_j = -2mi\pi(y_1 z_3 - y_3 z_1 + y_2 z_4 - y_4 z_2),$$

m étant l'ordre de la fonction φ. Il ne peut y avoir de fonctions intermédiaires, où les invariants M auraient d'autres valeurs que celles qui résultent de l'identité (2), *si ce n'est dans les cas de réduction des périodes étudiées par M. Picard.*

» Considérons maintenant deux fonctions intermédiaires φ et φ', et appelons m', α', β', δ', Γ' les quantités analogues à m, α, β, δ, Γ et relatives à la seconde fonction φ'. Les équations

$$\varphi = \varphi' = 0$$

auront $2mm'$ solutions distinctes, et les sommes X_1 et X_2 des $2mm'$ valeurs de x_1 et des $2mm'$ valeurs de x_2, qui satisfont à ces équations, seront données par les congruences

$$X_1 \equiv -\frac{1}{2i\pi}(\Gamma_1 m' + \Gamma'_1 m),$$

$$X_2 \equiv -\frac{1}{2i\pi}(\Gamma_2 m' + \Gamma'_2 m).$$

» Il y a une autre manière d'étudier le nombre des zéros de la fonction φ. Supposons qu'on recherche combien cette fonction admet de zéros distincts de la forme suivante

$$x_1 = a_i t + a_j u,$$
$$x_2 = b_i t + b_j u,$$

les quantités t et u étant assujetties à être réelles. On partagera ces zéros en deux classes suivant le signe du déterminant fonctionnel :

$$\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{du} - \frac{d\psi}{du}\frac{d\theta}{dt},$$

ψ et θ étant les parties réelle et imaginaire de φ.

» On trouvera que le nombre des zéros distincts de la première classe, diminué de celui des zéros distincts de la seconde classe, est égal à $-\frac{M_{ij}}{2i\pi}$, c'est-à-dire à m dans le cas de $i=1, j=3$, ou de $i=2, j=4$, et à o dans tous les autres cas. En conséquence, le nombre total des zéros distincts est au moins égal à m si $i=1$, $j=3$, ou si $i=2$, $j=4$, et il diffère de m d'un nombre pair. Il est toujours pair dans tous les autres cas. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des matrices.* Note de M. ED. WEYR, présentée par M. Hermite.

« On sait que toute matrice de l'ordre n satisfait à une équation de degré n : c'est l'équation fondamentale de M. Cayley. Il y a cependant des matrices qui satisfont à une équation de degré moindre que n : ce sont les matrices que M. Sylvester nomme *dérogatoires*. Je suis parvenu à établir un théorème qui jette du jour sur ce sujet, et que je me permets de communiquer à l'Académie.

» M *étant une matrice d'ordre n aux racines latentes* $\mu_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \mu_\lambda$ *et* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *étant les degrés de multiplicité de ces racines, soient* $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ *les degrés de nullité des matrices* $M - \mu_\alpha$, $M - \mu_\beta, \ldots, M - \mu_\lambda$; *alors* M *satisfait à l'équation*

$$(M - \mu_\alpha)^{\alpha-\alpha_1+1}(M - \mu_\beta)^{\beta-\beta_1+1}\ldots(M - \mu_\lambda)^{\lambda-\lambda_1+1} = 0.$$

» Les nombres $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$, dont chacun est au moins égal à 1, ne peuvent pas surpasser les nombres respectifs $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Dans le cas de $\alpha_1 = \beta_1 = \ldots = \lambda_1 = 1$, on tombe sur l'équation de M. Cayley. Dans tout autre cas, la matrice M est dérogatoire.