1885BuAsI...2..405P

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION;

PAR M. H. POINCARÉ.

Dans le travail que j'ai récemment publié sur le même sujet (1), je n'ai pas donné les détails des calculs. Bien que mon analyse diffère peu de celle qu'a employée M^me de Kowalewski dans ses recherches sur l'anneau de Saturne, il ne sera peut-être pas inutile de revenir sur ces détails, ne fût-ce que pour faire voir quelles sont les simplifications qui peuvent être dues aux hypothèses que l'on a droit de faire sur l'extrême petitesse de certaines quantités.

Il s'agit d'abord de calculer le potentiel du tore. Soient O le centre du tore, C le centre d'un cercle méridien, M un point quelconque du plan de ce cercle, R la distance OC, ω l'angle du plan OCM avec un plan méridien fixe, x et y les coordonnées rectangulaires du point M rapporté à deux axes passant par le point C, le second parallèle à l'axe du tore. Les coordonnées de M rapportées à trois axes rectangulaires dans l'espace seront alors

$$(\mathrm{R}+x)\cos\omega,\quad (\mathrm{R}+x)\sin\omega \text{ et } y.$$

Nous poserons de plus

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi$$

et nous appellerons r le rayon du cercle méridien du tore, de telle sorte que l'équation du tore, dans ce système particulier de coordonnées, se réduira à $\rho = r$.

Pour évaluer le potentiel du tore par rapport au point M, nous décomposerons la surface du cercle méridien en une infinité d'éléments infiniment petits $d\omega'$. Chacun de ces éléments engendrera, par sa révolution autour de l'axe, un anneau élémentaire. Soient x' et y' les coordonnées de l'élément $d\omega'$ rapporté aux deux axes rectangulaires définis plus haut, $d\mu$ la masse de l'anneau élé-

(1) *Bulletin astronomique*, t. II, p. 109.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1885BuAsI...2..405P

mentaire correspondant, dV le potentiel de cet anneau, V le potentiel du tore complet. Soient enfin

$$a=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},\quad b=\sqrt{(2R+x+x')^2+(y-y')^2}$$

la plus petite et la plus grande distance du point M à l'anneau considéré, et $M(a, b)$ la moyenne arithmético-géométrique de ces deux distances. On trouvera, en conservant les mêmes unités que dans le Mémoire cité,

$$d\mu=2\pi(R+x')d\omega',\quad dV=\frac{d\mu}{M(a,b)},\quad V=\int dV.$$

La théorie des fonctions elliptiques nous apprend que l'on a

$$\frac{1}{M(a,b)}=\frac{1}{b}\left(S_0\log\frac{a}{b}+S_1\right),$$

S_0 et S_1 étant des séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{a}{b}$. La même théorie nous donnerait également les coefficients de ces séries; mais je vais indiquer un autre moyen de les calculer.

Soit

$$\frac{1}{M(a,b)}=\frac{A_0}{b}\log\frac{a}{b}+\frac{A_1a^2}{b^3}\log\frac{a}{b}+\frac{B_0}{b}+\frac{B_1a^3}{b^2}+\dots.$$

Remplaçons dans cette identité a par $\sqrt{ab}$ et b par $\frac{a+b}{2}$, il viendra

$$\frac{1}{M\left(\sqrt{ab},\ \frac{a+b}{2}\right)}=\frac{A_0}{b}\log\frac{a}{b}+\frac{A'_1a}{b^2}\log\frac{a}{b}+\frac{B'_0}{b}+\frac{B'_1a}{b^2}+\dots.$$

Mais on a

$$M(a,b)=M\left(\sqrt{ab},\ \frac{a+b}{2}\right).$$

Les deux séries doivent donc être identiques; ce qui conduit aux identités

$$\begin{aligned}B_0&=A_0\log4+2B_0,\\ 0&=-A_0+4A_1,\\ 0&=-2A_0-A_0\log4+4A_1\log4-2B_0+8B_1.\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{M(a,b)}=A_0\left(\frac{1}{b}\log\frac{a}{4b}+\frac{a^2}{4b^3}\log\frac{a}{4b}+\frac{a^2}{4b^3}\right),$$

en négligeant les termes de l'ordre de $\frac{r^3}{R^4}\log\frac{r}{R}$.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1885BuAsI...2..405P

Il reste à déterminer A_0. Pour cela nous appliquerons un cas particulier du théorème de Green, c'est-à-dire le théorème du flux de force. Considérons un cercle de rayon très petit décrit autour de l'élément $d\omega'$. Ce cercle engendrera par sa révolution un tore enveloppant l'anneau élémentaire considéré. En un point de ce tore, a sera très petit et peu différent du rayon du cercle méridien, b différera peu de $2(R+x')$. La surface du tore sera donc $4\pi^2 a(R+x')$; l'attraction exercée par l'anneau $d\mu$ sur un point du tore différera peu de

$$-\frac{A_0\,d\mu}{ab} = -\frac{A_0\,d\mu}{2a(R+x')},$$

ce qui fait pour le flux de force $-2\pi^2 A_0\,d\mu$. Or ce flux doit être égal, d'après le théorème de Green, à $4\pi\,d\mu$. On a donc

$$A_0 = -\frac{2}{\pi}.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$\xi = x + x', \quad \zeta = y - y',$$

et nous trouverons aisément les développements suivants,

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2R} - \frac{\xi}{4R^2} + \frac{\xi^2}{8R^3} - \frac{\zeta^2}{16R^3},$$

$$\log\frac{1}{b} = \log\frac{1}{2R} - \frac{\xi}{2R} + \frac{\xi^2}{8R^2} - \frac{\zeta^2}{8R^2},$$

$$\frac{4R^2}{b^3} = \frac{1}{2R} - \frac{3\xi}{4R^2} + \frac{3\xi^2}{4R^3} - \frac{3\zeta^2}{16R^3},$$

$$\frac{1}{b}\log\frac{2R}{b} = -\frac{\xi}{4R^2} + \frac{3\xi^2}{16R^3} - \frac{\zeta^2}{16R^3}\,\frac{4R^2}{b^3},$$

$$\log\frac{2R}{b} = -\frac{\xi}{4R^2} + \frac{7\xi^2}{16R^3} - \frac{\zeta^2}{16R^3}.$$

En tenant compte de ces développements, on trouve avec le même degré d'approximation que plus haut

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_0 M(a,b)} = {} & \frac{1}{2R}\log\frac{a}{8R} - \frac{\xi}{4R^2}\log\frac{a}{2\alpha R} \\ & + \frac{\xi^2}{8R^3}\log\frac{a}{2\beta R} - \frac{\zeta^2}{16R^3}\log\frac{a}{2\alpha R} + \frac{1}{4}\,\frac{a^2}{8R^3}\log\frac{a}{2\alpha R},\end{aligned}$$

$$\alpha = 4e^{-1}, \quad \beta = 4e^{-\frac{3}{2}}.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1885BuAsI...2..405P

On trouve ensuite

$$V = -\int \frac{4(R + x')\,d\omega'}{A_0 M(a, b)}, \quad \frac{dV}{d\omega'} = -\frac{4(R + x')}{A_0 M(a, b)}.$$

On en déduit, toujours avec le même degré d'approximation,

$$\begin{aligned} -\frac{dV}{2\,d\omega'} = \log\frac{a}{4} - \xi \log\frac{a}{\alpha} + \xi^2 \log\frac{a}{\beta} - \frac{\zeta^2}{2}\log\frac{a}{\alpha} \\ + \frac{a^2}{4}\log\frac{a}{\alpha} + 2x'\log\frac{a}{4} - 2x'\xi\log\frac{a}{\alpha}. \end{aligned}$$

J'ai écrit cette dernière formule, pour abréger, en prenant $2R$ pour unité de longueur, quitte à rétablir plus tard l'homogénéité.

Pour obtenir la valeur de V lui-même, il reste à calculer un certain nombre d'intégrales doubles de la forme suivante

$$\int \varphi(x', y') \log\frac{a}{\alpha}\, d\omega'$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la section méridienne du tore. Une pareille intégrale n'est autre chose que le potentiel logarithmique du cercle méridien par rapport au point M supposé attiré en raison inverse de la distance, et de telle sorte que la densité de la matière attirante soit égale à $\varphi(x', y')$. Si cette densité est uniforme en tous les points également distants de C, le potentiel est le même que si toute la masse était concentrée au centre C du cercle méridien. On a donc

$$\int f(x'^2 + y'^2) \log\frac{a}{\alpha}\, d\omega' = \log\frac{\rho}{\alpha} \int f(x'^2 + y'^2)\, d\omega'.$$

Si f est nul sur la circonférence du cercle méridien, c'est-à-dire pour $x'^2 + y'^2 = r^2$, l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx'}[f(x'^2 + y'^2)] \log\frac{a}{\alpha}\, d\omega' &= -\int f(x'^2 + y'^2) \frac{d}{dx'}\log\frac{a}{\alpha}\, d\omega' \\ &= \int f(x'^2 + y'^2) \frac{d}{dx}\log\frac{a}{\alpha}\, d\omega' = \frac{d}{dx}\log\frac{\rho}{\alpha}\int f(x'^2 + y'^2)\, d\omega'. \end{aligned}$$

On trouve de même

$$(1) \quad \int \frac{d^{m+n}}{dx'^m\, dy'^m}[f(x'^2 + y'^2)] \log\frac{a}{\alpha}\, d\omega' = \frac{d^{m+n}}{dx^m\, dy^n}\log\frac{\rho}{\alpha}\int f(x'^2 + y'^2)\, d\omega',$$

pourvu que f soit nul ainsi que ses $m + n - 1$ premières dérivées pour $x'^2 + y'^2 = r^2$.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1885BuAsI...2..405P

Ces formules donnent

$$\int \log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \pi r^2 \log\frac{\rho}{\alpha},$$
$$\int (x'^2+y'^2)\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{\pi r^4}{2}\log\frac{\rho}{\alpha},$$
$$\int (x'^2+y'^2-r^2)\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = -\frac{\pi r^4}{2}\log\frac{\rho}{\alpha},$$
$$\int (x'^2+y'^2-r^2)^2\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{\pi r^6}{3}\log\frac{\rho}{\alpha}.$$

J'appliquerai maintenant la formule (1) en différentiant la troisième des intégrales précédentes par rapport à x', ou par rapport à y', et la quatrième deux fois par rapport à y'; j'obtiendrai ainsi

$$2\int x'\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = -\frac{\pi r^4}{2}\,\frac{\cos\varphi}{\rho},\qquad 2\int y'\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = -\frac{\pi r^4}{2}\,\frac{\sin\varphi}{\rho},$$
$$2\int (x'^2+y'^2-r^2)\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' + 4\int x'^2\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = -\frac{\pi r^6}{3}\,\frac{\cos2\varphi}{\rho^2};$$

d'où je tire

$$\int x'^2\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{\pi r^4}{4}\log\frac{\rho}{\alpha} - \frac{\pi r^6}{12}\,\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}$$
$$\int y'^2\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{\pi r^4}{4}\log\frac{\rho}{\alpha} + \frac{\pi r^6}{12}\,\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}.$$

Si nous supposons que le point M est sur la surface du tore de telle façon que $\rho = r$, ces formules se simplifieront un peu, de sorte qu'on aura

$$\int \xi\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \pi r^3\cos\varphi\log\frac{r}{\alpha} - \frac{\pi r^3\cos\varphi}{4},$$
$$\int \xi^2\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \pi r^4\log\frac{r}{\alpha}\left(\frac{3}{4}+\frac{\cos2\varphi}{2}\right) - \pi r^4\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos2\varphi}{3}\right),$$
$$\int \zeta^2\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \pi r^4\log\frac{r}{\alpha}\left(\frac{3}{4}-\frac{\cos2\varphi}{2}\right) + \pi r^4\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos2\varphi}{6}\right),$$
$$\int a^2\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{3}{2}\pi r^4\log\frac{r}{\alpha} + \pi r^4,$$
$$\int x'\xi\log\frac{a}{\alpha}\,d\omega' = \frac{\pi r^4}{4}\log\frac{r}{\alpha} - \frac{\pi r^4}{5}\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{24}\cos2\varphi\right).$$

Toutes ces intégrales sont des fonctions linéaires de $\cos\varphi$ et $\cos2\varphi$; si nous les substituons dans l'expression de V, nous trouverons

$$V = F + G\cos\varphi + H\cos2\varphi.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1885BuAsI...2..405P

F, G et H étant indépendants de φ; on a, en rétablissant l'homogénéité,

$$G = \frac{2\pi r'^3}{R}\log\frac{r}{2\alpha R} + \frac{\pi r^3}{2R},$$

$$H = \frac{3\pi r^4}{2R^2}\log\frac{2\mu R}{r},$$

μ étant une constante facile à calculer d'après ce qui précède. Quant à F, il n'intervient pas dans la suite et nous n'écrirons que son terme principal qui est

$$2\pi r^2 \log\frac{8R}{r}.$$

Supposons maintenant que la masse considérée, au lieu d'affecter la forme du tore dont l'équation était $\rho = r$, prenne la forme d'une surface de révolution S, peu différente de ce tore, et ayant pour équation

$$\rho = r + \beta_2\cos 2\varphi + \beta_3\cos 3\varphi + \ldots + \beta_i \cos i\varphi + \ldots.$$

Nous pourrons alors regarder l'attraction de cette masse comme la somme de l'attraction du tore et de la différence entre la surface S et le tore. Nous appellerons δV le potentiel dû à cette différence, V le potentiel du tore par rapport à un point de sa propre surface, et $V + \Delta V$ le potentiel du tore par rapport à un point de la surface S, de sorte que le potentiel total par rapport à un point de la surface S sera

$$V + \Delta V + \delta V = \int \frac{dV}{d\omega'}\,d\omega',$$

l'intégrale du second membre étant étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la section méridienne de la surface S. Mais, les β étant très petits, nous pourrons, dans le calcul de ΔV et de δV, ne tenir compte que du terme principal de $\frac{dV}{d\omega'}$ qui est $-2\log\frac{a}{8R}$. Nous trouverons ainsi

$$\Delta V = 2\pi r^2 \log\frac{8R}{\rho} - 2\pi r^2\log\frac{8R}{r} = -2\pi r \Sigma \beta_i \cos i\varphi,$$

en négligeant les carrés de β. On trouve encore avec le même degré d'approximation

$$\delta V = -2r\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{r}{4R}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right| \Sigma(\beta_i \cos i\varphi')\,d\varphi',$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1885BuAsI...2..405P

si l'on observe que, pour les éléments de la différence entre la surface δ et le tore, on peut écrire

$$a = \left|2r\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right|, \quad d\omega' = r\,d\varphi'\Sigma\beta_i\cos i\varphi'.$$

On peut écrire également

$$\delta V = -2r\int_0^{2\pi}\log\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|(\Sigma\beta_i\cos i\theta\cos i\varphi + \Sigma\beta_i\sin i\theta\sin i\varphi)\,d\theta.$$

Cette intégrale peut s'évaluer sans peine. On a en effet

$$\log\frac{1}{1-z} = \sum\frac{z^n}{n},$$

d'où

$$\log\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \sum\frac{e^{in\theta}}{n},$$

ou, en égalant les parties réelles,

$$\log\frac{1}{2} - \log\sin\frac{\theta}{2} = \sum\frac{\cos n\theta}{n}.$$

On en déduit

$$\int_0^{2\pi}\log\sin\frac{\theta}{2}\cos i\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{i}$$

et

$$\delta V = \sum\frac{2\pi r\beta_i\cos i\varphi}{i}.$$

Il reste donc

$$V + \Delta V + \delta V = F + G\cos\varphi + H\cos 2\varphi + 2\pi r\Sigma\beta_i\cos i\varphi\left(\frac{1}{i}-1\right).$$

D'autre part, le potentiel dû à la force centrifuge a pour valeur, en appelant n la vitesse de rotation et en négligeant $n^2\beta$,

$$\frac{n^2}{2}(R+x)^2 = \frac{n^2}{2}\left(R^2+\frac{r^2}{2}\right) + n^2 Rr\cos\varphi + \frac{n^2}{4}r^2\cos 2\varphi.$$

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que l'expression

$$V + \Delta V + \delta V + \frac{n^2}{2}(R+x)^2$$

soit indépendante de φ, ce qui montre d'abord que, avec le degré d'approximation adopté, tous les β sont négligeables, sauf β_2, c'est-

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1885BuAsI...2..405P

à-dire que la section méridienne peut être regardée comme une ellipse dont l'aplatissement

$$\lambda = \frac{2\beta_2}{r}.$$

En égalant à o les coefficients de $\cos\varphi$ et $\cos 2\varphi$, on obtient les deux équations

$$G + n^2 R r = H - \pi r \beta_2 + \frac{n^2}{4} r^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$n^2 = \frac{2\pi r^2}{R^2}\left(\log\frac{8R}{r} - \frac{5}{4}\right),$$

et approximativement

$$\lambda = \frac{2n^2}{\pi}.$$

Ces résultats ne sont pas tout à fait les mêmes que ceux de mon premier travail, par suite d'une faute de calcul que j'y avais commise.

Occupons-nous maintenant du cas où la masse fluide est répartie en deux volumes annulaires séparés, peu différents de deux tores. J'appellerai R et r les deux rayons du plus grand de ces deux tores, R′ et r' les deux rayons du plus petit. Le potentiel, en un point de la surface du premier tore, sera égal au potentiel dû à son attraction propre, c'est-à-dire à

$$F + G\cos\varphi$$

$\Big($en négligeant H et les termes du même ordre, c'est-à-dire de même ordre que $\frac{r^4}{R^2}\log\frac{R}{r}\Big)$, plus le potentiel dû à l'attraction du second tore, que je puis réduire à son terme principal, si $\frac{r'}{R - R'}$ est assez petit. Si l'on observe que la distance d'un point du premier tore au second est à fort peu près $R - R' + r\cos\varphi$, on verra que ce terme principal peut s'écrire

$$2\pi r'^2 \log\frac{8R'}{R - R' + r\cos\varphi} = 2\pi r'^2 \log\frac{8R'}{R - R'} - \frac{2\pi r'^2 r\cos\varphi}{R - R'}.$$

Il faut pour l'équilibre que ce potentiel augmenté de $\frac{n^2}{2}(R + x)^2$ soit indépendant de φ; on doit donc avoir

$$G + n^2 R r - \frac{2\pi r'^2 r}{R - R'} = 0.$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1885BuAsI...2..405P

Si l'on appelle G' et n' les quantités qui sont au second tore ce que G et n sont au premier, on trouvera de même

$$G' + n'^2 R' r' + \frac{2\pi r^2 r'}{R - R'} = 0.$$

On a d'ailleurs

$$G = \frac{2\pi r^3}{R} \log \frac{r}{\nu R}, \quad G' = \frac{2\pi r'^3}{R'} \log \frac{r'}{\nu R'},$$

ν étant une constante facile à calculer. Si donc on veut que les deux vitesses de rotation n et n' soient les mêmes, il faut que l'on ait

$$\frac{r^2}{R^2} \log \frac{r}{\nu R} - \frac{r'^2}{R'^2} \log \frac{r'}{\nu R'} = \frac{A}{R - R'} \left(\frac{r'^2}{R} + \frac{r^2}{R'} \right).$$

En appelant

$$M = 2\pi^2 (r^2 R + r'^2 R')$$

la masse totale du fluide, nous pouvons écrire

$$M = 2\pi^2 RR'(R - R') \left(\frac{r^2}{R^2} \log \frac{r}{\nu R} - \frac{r'^2}{R'^2} \log \frac{r'}{\nu R'} \right),$$

ce qui est la formule que j'avais donnée à la fin du travail cité.

SUR LA STRUCTURE INTIME DE L'ENVELOPPE SOLAIRE;

PAR E.-L. TROUVELOT.

[*Suite et fin* (1).]

D'un autre côté, puisque le réseau sombre de la surface solaire donne un spectre grisâtre continu qui élargit les raies de Fraunhofer, tandis que le spectre beaucoup plus pâle des granulations ne produit aucun élargissement sur elles, au contraire, il faut bien que l'absorption exercée par ce réseau soit beaucoup plus forte que celle qui est exercée par les granulations, sans quoi il n'y aurait pas renforcement des raies sur son spectre. Ces faits nous indiquent avec évidence que le réseau sombre qui sépare les granulations est la cause principale des phénomènes d'absorption

(1) *Voir* p. 263 et 364 du t. II du *Bulletin astronomique*.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System