Sur les Equations Linéaires aux Différentielles ordinaires et aux Différences finies.

PAR H. POINCARÉ.

---

§1. *Etude sommaire des Intégrales Irrégulières.*

Les résultats que je vais chercher à démontrer dans le présent mémoire et qui se rapportent tant à certaines équations différentielles linéaires qu'à des équations analogues, mais à différences finies, ont déjà été énoncés les uns dans un mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences pour le concours du Grand Prix des Sciences Mathématiques le 1[er] Juin 1880 et qui est resté inédit, les autres dans une communication verbale faite à la Société Mathématique de France en Novembre 1882 et dans une note insérée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences le 5 Mars 1883.

Soit:

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

une équation différentielle linéaire où les coëfficients P seront des polynômes en x que je supposerai tous de même degré, à savoir de degré p. J'appellerai A_i le coëfficient de x^p dans le polynôme P_i.

Nous allons étudier la façon dont se comportent les intégrales de l'équation (1) quand x croît indéfiniment d'une certaine manière, par exemple par valeurs réelles positives. Il reste donc convenu jusqu'à nouvel ordre que x est réel et positif, tandis que les intégrales y et les coëfficients des polynômes P peuvent être imaginaires.

Nous allons avoir à considérer l'équation algébrique:

$$(2) \qquad A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0.$$

Nous supposerons d'abord que cette équation n'a pas de racines multiples, et même qu'elle n'a pas deux racines ayant même partie réelle.

Les méthodes de M. Fuchs ne sont pas applicables au problème qui nous occupe, parce que les intégrales de l'équation (1) sont *irrégulières* dans le voisinage du point $x=\infty$. Il faut donc employer des procédés particuliers.

Nous poserons: $$\frac{P_i}{P_n}=Q_i \qquad \frac{A_i}{A_n}=B_i$$

et, supposant d'abord l'équation (1) du 2[d] ordre, nous l'écrirons:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+Q_1\frac{dy}{dx}+Q_0y=0.$$

Posons: $$y=e^{\int u dx}$$

l'équation différentielle deviendra:

$$\frac{du}{dx}+u^2+Q_1u+Q_0=0.$$

Je dis que quand x croîtra indéfiniment, u tendra vers une des racines de l'équation (2). Soient en effet α et β les deux racines de cette équation de telle sorte que: $$(z-\alpha)(z-\beta)=z^2+B_1z+B_0$$

et que la partie réelle de α soit plus grande que celle de β.

Soit: $$V=v+iv'=\log(u-\alpha)-\log(u-\beta).$$

Il viendra $$\frac{dV}{dx}=(\beta-\alpha)\frac{u^2+Q_1u+Q_0}{u^2+B_1u+B_0}.$$

Nous allons étudier le signe de la partie réelle de $\frac{dV}{dx}$, c'est à dire de $\frac{dv}{dx}$. Si l'on donne à x une valeur très grande, les différences Q_1-B_1 et Q_0-B_0 sont très petites de l'ordre de $\frac{1}{x}$. Cela posé, on peut démontrer successivement les résultats suivants.

Supposons que Q_1-B_1 et Q_0-B_0 aient des valeurs *données* suffisamment petites, et soit K un nombre donné positif. On peut trouver deux nombres ε et ε_1 tels que toutes les fois que:

$$|u-\alpha|>\varepsilon \qquad |u-\beta|>\varepsilon_1$$

on ait également

$$\left|\frac{u(Q_1-B_1)+(Q_0-B_0)}{u^2+B_1u+B_0}\right|<K. \tag{3}$$

De plus lorsque Q_1-B_1 et Q_0-B_0 tendront simultanément vers 0, K ne variant pas, ε et ε_1 tendront aussi simultanément vers 0.

En second lieu, on peut toujours trouver un nombre K assez petit pour que $\frac{dv}{dx}$ soit négatif comme la partie réelle de $(\beta-\alpha)$ lorsque l'inégalité (3) a lieu.

Il suffit pour cela que l'on ait:

$$K < \cos\left[\arg\left(\alpha - \beta\right)\right].$$

Enfin on peut trouver deux nombres k et k_1 tels que les inégalités

$$|u - \alpha| < \varepsilon \qquad |u - \beta| < \varepsilon_1$$

aient lieu toutes les fois que v est compris entre k et $-k_1$.

On conclut de tout cela que si x est suffisamment grand, il existe deux nombres k et k_1 tels que $\frac{dv}{dx}$ soit négatif toutes les fois que v est compris entre k et $-k_1$; de plus lorsque x croît constamment et indéfiniment, k et k_1 croissent aussi constamment et indéfiniment.

Supposons que pour une valeur donnée de x, v ait une certaine valeur initiale comprise entre k et $-k_1$, on est certain que v va décroître tant qu'il sera supérieur à $-k_1$, et que, si après avoir décrû, il arrive qu'il croît de nouveau, il ne pourra jamais en tous cas redevenir supérieur à $-k_1$.

Soit $M(h)$ la plus grande valeur que puisse prendre v quand x varie de h à $+\infty$. Lorsque h croîtra, $M(h)$ décroîtra ou du moins ne pourra jamais croître. Donc quand h grandira indéfiniment, $M(h)$ tendra vers une limite *finie ou infinie* que j'appellerai M. Si $M = -\infty$, on est certain que v tend vers $-\infty$; tandis que si M était fini, il pourrait arriver ou bien que v tendît vers la limite M, ou que v ne tendît vers aucune limite. Dans le cas qui nous occupe on vient de voir qu'on peut prendre h assez grand pour que l'on ait:

$$M(h) < -k_1,$$

d'où:

$$M < -k_1.$$

Mais nous pouvons prendre x assez grand pour que k_1 soit aussi grand que l'on veut. On a donc:

$$M = -\infty$$

ou

$$\lim v = -\infty \qquad \lim u = \alpha. \qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

Le raisonnement précédent n'est en défaut que si la valeur initiale de v n'est pas comprise entre k et $-k_1$. Mais nous avons choisi arbitrairement la valeur initiale de x, nous aurions pu prendre tout aussi bien une valeur quelconque de cette variable. Pour que le raisonnement soit en défaut, il faut donc que, quel que soit x, v soit plus grand que k et plus petit que $-k_1$. Or quand x tend vers l'infini, il en est de même de k et de k_1. Donc v tend aussi vers $\pm\infty$. Donc u tend vers β ou vers α. En résumé la limite de u est en général α, mais pour une intégrale particulière, elle peut être égale à β.

Faisons encore le raisonnement pour les équations du 3ème ordre. L'équation:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + Q_2\frac{d^2y}{dx^2} + Q_1\frac{dy}{dx} + Q_0 y = 0,$$

peut s'écrire

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx}(3u + Q_2) + u^3 + Q_2u^2 + Q_1u + Q_0 = 0. \tag{4}$$

Soient α, β, γ les trois racines de l'équation (2) rangées par ordre de parties réelles décroissantes. Nous considérerons à côté de l'équation (4) l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx}(3v + B_2) + v^3 + B_2v^2 + B_1v + B_0 = 0, \tag{4^{\text{bis}}}$$

dont l'intégrale générale est: $v = \dfrac{\lambda\alpha e^{\alpha x} + \mu\beta e^{\beta x} + \nu\gamma e^{\gamma x}}{\lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} + \nu e^{\gamma x}}$.

λ, μ et ν étant les constantes introduites par l'intégration. Nous allons chercher une fonction réelle des parties réelles et imaginaires de v et de $\frac{dv}{dx}$ choisie de telle sorte que sa dérivée soit toujours négative. Nous considérerons ensuite une fonction formée de la même manière avec les parties réelles et imaginaires de u et de $\frac{du}{dx}$, et nous reconnaîtrons que la dérivée de cette nouvelle fonction sera aussi toujours négative pourvu que la fonction elle-même soit comprise entre deux limites données, lesquelles limites tendent respectivement vers $\pm\infty$, quand x tend vers $+\infty$. La méthode que nous suivrons sera donc de tout point semblable à celle que nous avons employée pour le cas du 2[d] ordre.

La fonction que nous cherchons à former dépend de u et de $\frac{du}{dx}$ et par conséquent de y, de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$. Il y a avantage à y introduire directement ces éléments.

Employons pour abréger la notation de Lagrange de façon que y' désigne $\frac{dy}{dx}$ et que y'' designe $\frac{d^2y}{dx^2}$ et posons:

$$\begin{aligned} y &= X + Y + Z, \\ y' &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y'' &= \alpha^2 X + \beta^2 Y + \gamma^2 Z. \end{aligned}$$

La différentiation nous donnera:

$$\begin{aligned} y' &= X' + Y' + Z', \\ y'' &= \alpha X' + \beta Y' + \gamma Z', \\ -Q_2y'' - Q_1y - Q_0y &= \alpha^2X' + \beta^2 Y' + \gamma^2 Z'. \end{aligned}$$

Posons encore:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + Q_2\alpha^2 + Q_1\alpha + Q_0 &= A(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) \\ \beta^3 + Q_2\beta^2 + Q_1\beta + Q_0 &= B(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) \\ \gamma^3 + Q_2\gamma^2 + Q_1\gamma + Q_0 &= C(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \end{aligned}$$

il viendra :

$$X' = \alpha X - (AX + BY + CZ)$$
$$Y' = \beta Y - (AX + BY + CZ)$$
$$Z' = \gamma Z - (AX + BY + CZ).$$

On a alors :

$$\frac{d}{dx}\log\frac{Y}{X} = \beta - \alpha + A - B - A\frac{X}{Y} + B\frac{Y}{X} + C\left(\frac{Z}{X} - \frac{Z}{Y}\right) = \beta - \alpha + \Delta$$

avec des expressions analogues pour les dérivées logarithmiques de $\frac{Z}{X}$ et de $\frac{Z}{Y}$.

Lorsque x croît indéfiniment, A, B et C et par conséquent le terme complimentaire Δ tendent vers 0. La variable x ayant une valeur donnée suffisamment grande, on peut trouver un nombre positif ε tel que l'expression :

$$(|A| + |B| + |C|)\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)$$

soit plus petite que la partie réelle de $\alpha - \beta$ et que celle de $\beta - \gamma$. Si alors les valeurs absolues :

$$\left|\frac{X}{Y}\right|; \left|\frac{Y}{X}\right|, \left|\frac{X}{Z}\right|, \left|\frac{Z}{X}\right|, \left|\frac{Y}{Z}\right|, \left|\frac{Z}{Y}\right|$$

sont simultanément plus grandes que ε, on aura :

$$|\Delta| < (|A| + |B| + |C|)\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)$$

et par conséquent, les dérivées logarithmiques de $\frac{Y}{X}$, de $\frac{Z}{Y}$ et de $\frac{Z}{X}$ auront leurs parties réelles négatives, de sorte que :

$$\frac{d}{dx}\log\left|\frac{Y}{X}\right| < 0, \qquad \frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{X}\right| < 0, \qquad \frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{Y}\right| < 0.$$

De plus lorsque x croîtra indéfiniment, ε tendra vers 0. Ajoutons d'ailleurs que la dérivée logarithmique de $\left|\frac{Y}{X}\right|$ reste négative quand même $\left|\frac{Z}{X}\right|$ ou $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ seraient plus petits que ε. De même on aura :

$$\frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{X}\right| < 0 \qquad \text{même si } \left|\frac{Y}{Z}\right| \text{ ou } \left|\frac{Y}{X}\right| < \varepsilon,$$

$$\frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{Y}\right| < 0 \qquad \text{même si } \left|\frac{X}{Z}\right| \text{ ou } \left|\frac{X}{Y}\right| < \varepsilon.$$

Soit maintenant H la plus grande des deux quantités $\left|\frac{Y}{X}\right|$ et $\left|\frac{Z}{X}\right|$. Quelle est la condition pour que H soit une fonction décroissante de x? Je dis qu'il suffit que H soit compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$, ε étant bien entendu supposé plus petit que 1.

En effet nous pouvons faire deux hypothèses.

1°. $$H = \left|\frac{Y}{X}\right| > \left|\frac{Z}{X}\right|$$

on a alors $$\left|\frac{Y}{X}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{X}{Z}\right| > \left|\frac{X}{Y}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{Z}\right| > 1 > \varepsilon,$$

et par conséquent: $$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx}\left|\frac{Y}{X}\right| < 0.$$ *C. Q. F. D.*

2°. $$H = \left|\frac{Z}{X}\right| > \left|\frac{Y}{X}\right|.$$

On a $$\left|\frac{Z}{X}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z}{Y}\right| > 1 > \varepsilon, \qquad \left|\frac{X}{Y}\right| > \left|\frac{X}{Z}\right| > \varepsilon,$$

et par conséquent: $$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx}\left|\frac{Z}{X}\right| < 0.$$ *C. Q. F. D.*

Ainsi H décroît toutes les fois qu'il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$.

Or pour $x = \infty$ on a: $\lim \varepsilon = 0$.

Donc on a aussi:

$$\lim H = 0, \qquad \lim \frac{Y}{X} = 0, \qquad \lim \frac{Z}{X} = 0,$$

d'où l'on déduit aisément

$$\lim u = \lim \frac{y'}{y} = \alpha.$$ *C. Q. F. D.*

Il n'y aurait d'exception que si H restait constamment supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, auquel cas sa limite serait infinie. Dans ce cas, on a toujours:

$$\left|\frac{Z}{X}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{X}\right| > \varepsilon,$$

toutes les fois que $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. En effet il vient, ou bien

$$H = \frac{Y}{X} > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z}{Y}\right| > \varepsilon \left|\frac{Y}{Z}\right| > \varepsilon$$

d'où $$\left|\frac{Z}{X}\right| = \left|\frac{Z}{Y}\right| \left|\frac{Y}{X}\right| > 1 > \varepsilon,$$

ou bien $$H = \left|\frac{Z}{X}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z}{Y}\right| > \varepsilon \quad \left|\frac{Y}{Z}\right| > \varepsilon,$$

d'où $$\left|\frac{Y}{X}\right| = \left|\frac{Y}{Z}\right| \left|\frac{Z}{X}\right| > 1 > \varepsilon.$$

D'où l'on doit conclure que la fonction $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ est décroissante toutes les fois qu'elle est comprise entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$; il en résulte, comme nous l'avons fait voir plusieurs fois, que cette fonction tend *en général* vers 0, et qu'elle peut aussi, *mais exceptionnellement* tendre vers l'∞. Dans le premier cas on a:

$$\lim u = \beta,$$

dans le second:

$$\lim u = \gamma. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Il n'est pas besoin d'insister pour faire comprendre que ce raisonnement est applicable à une équation d'ordre quelconque. Dans tous les cas la limite de la dérivée logarithmique de y est une des racines de l'équation (2).

De ce que la limite de $\frac{y'}{y}$ est égale à un nombre fini et déterminé α, il ne s'en suit pas forcément que $\frac{y}{e^{\alpha x}}$ tende vers une limite finie et determinée; car si l'on avait par exemple $y = xe^{\alpha x}$ il viendrait:

$$\lim \frac{y'}{y} = \alpha, \qquad \lim \frac{y}{e^{\alpha x}} = \infty.$$

Ce n'est que dans un paragraphe ultérieur que nous démontrerons que la limite $\frac{y}{x^m e^{\alpha x}}$ est en général finie et déterminée.

Pour le moment supposons que x tende vers l'infini de façon que l'on ait:

$$x = \rho\lambda \qquad \lambda = e^{i\omega}$$

ρ croissant indéfiniment par valeurs réelles positives et λ étant une quantité constante d'argument ω, et de module 1. Il est facile de ramener ce cas au précédent.

En effet l'équation (1) devient:

$$(1^{\text{bis}}) \qquad \frac{P_n}{\lambda^n}\frac{d^n y}{d\rho^n} + \frac{P_{n-1}}{\lambda^{n-1}}\frac{d^{n-1}y}{d\rho^{n-1}} + \ldots + \frac{P_1}{\lambda}\frac{dy}{d\rho} + P_0 y = 0,$$

où la nouvelle variable ρ croît indéfiniment par valeurs réelles positives.

L'équation (2) relative à la nouvelle variable et à la nouvelle équation (1^{bis}) s'écrit:

$$(2^{\text{bis}}) \qquad A_n z^n + A_{n-1}\lambda z^{n-1} + \ldots + A_1\lambda^{n-1}z + A_0\lambda^n = 0,$$

et si les racines de l'équation (2) étaient:

$$(5) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

celles de l'équation (2^{bis}) sont:

$$\alpha_1\lambda, \alpha_2\lambda, \ldots, \alpha_n\lambda.$$

Lorsque x croissait par valeurs positives, nous avions:

$$\frac{dy}{ydx} = \alpha_i, \tag{6}$$

α_i étant l'une des racines de (5). De même ici nous aurons:

$$\frac{dy}{yd\rho} = \alpha_k \lambda,$$

α_k étant encore une des racines (5); d'où:

$$\frac{dy}{ydx} = \alpha_k. \tag{6bis}$$

Mais il y a toutefois une différence entre le cas de l'équation (6) et celui de l'équation (6$^{\text{bis}}$). Lorsque x varie par valeurs positives, la limite α_i de $\frac{dy}{ydx}$ est *en général*, et en laissant de côté les cas exceptionnels dont il a été question plus haut, celle des racines de l'équation (5) dont la partie réelle est la plus grande. Si au contraire $x = \rho\lambda$ la limite α_k de $\frac{dy}{ydx}$ sera, *en général*, celle des racines de l'équation (5) qui est telle que la partie réelle de $\alpha_k \lambda$ soit aussi grande que possible.

Nous avons supposé au début de ce paragraphe que l'équation (2) n'a pas de racines multiples et qu'elle n'a pas non plus deux racines ayant même partie réelle. Voyons cependant ce qui arriverait si cette équation avait deux racines ayant même partie réelle.

En premier lieu supposons que ces deux racines ne soient pas celles dont la partie réelle est la plus grande. En particulier, dans le cas du 3$^{\text{e}}$ ordre, où nous avons appelé les trois racines en question α, β et γ, supposons que la partie réelle de α soit plus grande que celle de β et γ, la partie réele de β étant égale à celle de γ. En se reportant au raisonnement qui précède, on verrait que y étant l'intégrale *générale* de l'équation (1), le rapport:

$$u = \frac{dy}{ydx},$$

a encore pour limite α et que le raisonnement ne se trouve en défaut que dans les cas exceptionnels dont il a été question plus haut (quand la valeur initiale de H est plus grande que $\frac{1}{\varepsilon}$) et par conséquent pour certaines intégrales particulières de l'équation (1).

En second lieu, si l'équation (2) n'a pas de racines multiples, l'équation (2$^{\text{bis}}$) n'aura deux racines ayant même partie réelle que pour certaines valeurs particulières de λ et par conséquent la difficulté dont nous parlons ici ne se présentera que pour certaines valeurs *exceptionnelles* de l'argument ω de x.

Reste le cas où l'équation (2) a des racines multiples. Reprenons le cas du 3ᵉ ordre où les racines sont α, β et γ et supposons $\alpha = \beta$. Si l'on voulait répéter le raisonnement que nous avons fait en supposant les trois racines distinctes, on poserait:

$$y = X + Y + Z,$$
$$y' = \alpha X + Y\left(\alpha + \frac{1}{x}\right) + \gamma Z,$$
$$y'' = \alpha^2 X + Y\left(\alpha^2 + \frac{2\alpha}{x}\right) + \gamma^2 Z,$$

et on reconnaîtrait que la limite de $\frac{y'}{y}$ est égale à α en général, et, pour une certaine intégrale particulière, à γ.

Nous pouvons d'ailleurs embrasser tous ces cas particuliers dans le résultat suivant qui ne comporte aucune exception et dont nous ferons usage plus tard.

Supposons que x tende vers l'infini par valeurs réelles positives. Soit a un nombre dont la partie réelle soit supérieure à celles de toutes les racines de l'équation (2). On aura: $\lim ye^{-ax} = 0$

y étant une quelconque des intégrales de l'équation (1).

On peut alors trouver deux nombres b et c tels que la partie réelle de b soit plus petite que celle de a et plus grande que celle de c et que la partie réelle de c soit supérieure à celles de toutes les racines de l'équation (2).

Cela posé, considérons l'équation différentielle d'ordre $n+1$

$$(1^{\text{ter}}) \qquad \Sigma c P_k \frac{d^k y}{dx^k} - \Sigma P_k \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = 0.$$

Cette équation admet toutes les intégrales de l'équation (1) et en outre l'intégrale e^{cx} de sorte que son intégrale générale s'écrit:

$$\lambda e^{cx} + y_1$$

λ étant une constante arbitraire et y_1 l'intégrale générale de l'équation (1).

L'équation (2) relative à l'équation (1^{ter}) s'écrit:

$$(2^{\text{ter}}) \qquad (z - c)\Sigma A_k z^k = 0,$$

et admet les mêmes racines que l'équation (2), plus la racine c dont la partie réelle est plus grande que celle de toutes les autres.

Il en résulte que l'expression $\frac{y'}{y}$ a pour limite c, lorsque y est l'intégrale générale de l'équation (1^{ter}).

Il y a exception toutefois pour certaines intégrales particulières de cette équation. Ces intégrales exceptionnelles ne sont autres d'ailleurs que les intégrales de l'équation (1) elle-même.

De là on peut conclure qu' à partir d'une certaine valeur x_0 de x on a:
partie réelle
$$\frac{y'}{y} < b,$$
on déduit de là:
$$|y| < |y_0 e^{b(x-x_0)}|$$
y_0 étant la valeur de y pour $x = x_0$, ou bien
$$|ye^{-ax}| < |y_0 e^{-bx_0}| \, |e^{(b-a)x}|,$$
la partie réelle de $b - a$ étant négative, la limite du second membre est nulle, on a donc:
$$\lim ye^{-ax} = 0.$$
Ce résultat ne paraît d'abord s'appliquer qu'aux intégrales qui sont telles que $\frac{y'}{y}$ tend vers c, et ne pas subsister pour les intégrales exceptionnelles de l'équation (1^{ter}), à savoir les intégrales de l'équation (1). Mais une pareille intégrale peut toujours être regardée comme la différence de deux intégrales non exceptionnelles. Le résultat subsiste donc pour une intégrale quelconque de l'équation (1).

C. Q. F. D.

Si
$$x = \rho\lambda$$
et que ρ tende vers l'infini par valeurs réelles positives; si a est un nombre tel que la partie réelle de $a\lambda$ soit plus grande que la partie réelle d'une racine quelconque de l'équation (2) multipliée par λ, on a encore:
$$\lim ye^{-ax} = 0.$$
Il est à remarquer que dans tout ce qui précède nous ne nous sommes nullement appuyés sur ce que les coëfficients P de l'équation (1) sont des polynômes en x. Les résultats énoncés plus haut subsistent donc pourvu que les rapports
$$\frac{P_{n-1}}{P_n}, \frac{P_{n-2}}{P_n}, \ldots, \frac{P_1}{P_n}, \frac{P_0}{P_n}$$
tendent vers des valeurs finies et déterminées quand x croît indefiniment.

Nous avons supposé d'autre part que les polynômes P étaient tous de même degré. Les résultats subsisteraient encore si un ou plusieurs des polynômes
$$P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_1, P_0,$$
étaient de degré inférieur à p, P_n restant de degré p. Mais il n'en serait plus de même si le degré de P_n était inférieur à celui d'un quelconque des autres polynômes. Dans ce cas, l'équation (1) rentrerait dans un autre type d'équations linéaires que nous étudierons plus loin.

§2. *Equations aux Différences Finies.*

Avant de poursuivre les conséquences des résultats précédents, nous allons étendre ces résultats aux équations à différences finies de la forme suivante :

(1) $$P_k u_{n+k} + P_{k-1} u_{n+k-1} + \ldots + P_1 u_{n+1} + P_0 u_n = 0$$

les coëfficients P étant des polynômes d'ordre p par rapport au rang n de la fonction u_n. Il est aisé de voir l'analogie de cette équation avec les équations linéaires que nous avons envisagées dans le paragraphe précédent; car si l'on pose : $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$, $\Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n$, etc.
l'équation (1) s'écrira :

$$R_k \Delta^k u_n + R_{k-1} \Delta^{k-1} u_n + \ldots + R_1 \Delta u_n + R_0 u_n = 0,$$

les coëfficients R étant des polynômes entiers en n.

Nous appellerons A_i le coëfficient de n^p dans le polynôme P_i et nous envisagerons l'équation :

(2) $$A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0.$$

Posons de plus : $$\frac{P_i}{P_k} = Q_i, \qquad \frac{A_i}{A_k} = B_i.$$

Laissant d'abord de côté le cas exceptionnel où l'équation (2) aurait deux racines égales ou deux racines de même module, je vais démontrer le résultat suivant.

Lorsque n tend vers l'infini, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une des racines de l'équation (2) et en général vers celle dont le module est le plus grand.

Supposons l'équation du 3ème ordre pour fixer les idées, elle s'écrira :

$$u_{n+3} + Q_2 u_{n+2} + Q_1 u_{n+1} + Q_0 u_n = 0.$$

Soient α, β, γ les trois racines de l'équation (2) rangées par ordre de module décroissant. Posons :

$$\begin{aligned} u_n &= X_n + Y_n + Z_n, \\ u_{n+1} &= \alpha X_n + \beta Y_n + \gamma Z_n, \\ u_{n+2} &= \alpha^2 X_n + \beta^2 Y_n + \gamma^2 Z_n, \end{aligned}$$

on en conclut :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= X_{n+1} + Y_{n+1} + Z_{n+1}, \\ u_{n+2} &= \alpha X_{n+1} + \beta Y_{n+1} + \gamma Z_{n+1}, \\ u_{n+3} &= \alpha^2 X_{n+1} + \beta^2 Y_{n+1} + \gamma^2 Z_{n+1}. \end{aligned}$$

Posons encore :

$$\begin{aligned} \alpha^3 + Q_2 \alpha^2 + Q_1 \alpha + Q_0 &= A(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma), \\ \beta^3 + Q_2 \beta^2 + Q_1 \beta + Q_0 &= B(\beta - \alpha)(\beta - \gamma), \\ \gamma^3 + Q_2 \gamma^2 + Q_1 \gamma + Q_0 &= C(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta). \end{aligned}$$

Il viendra:

$$X_{n+1} = \alpha X_n - (AX_n + BY_n + CZ_n),$$
$$Y_{n+1} = \beta Y_n - (AX_n + BY_n + CZ_n),$$
$$Z_{n+1} = \gamma Z_n - (AX_n + BY_n + CZ_n).$$

On tire de là:

$$\frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\beta - \left(A\frac{X_n}{Y_n} + B + C\frac{Z_n}{Y_n}\right)}{\alpha - \left(A + B\frac{Y_n}{X_n} + C\frac{Z_n}{X_n}\right)}$$

avec des formules analogues pour:

$$\frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}}\frac{X_n}{Z_n} \text{ et } \frac{Z_{n+1}}{Y_{n+1}}\frac{Y_n}{Z_n}.$$

Il résulte de là que l'on peut trouver un nombre ε tel que

$$\text{si } \left|\frac{X_n}{Y_n}\right|, \left|\frac{Y_n}{X_n}\right|, \left|\frac{X_n}{Z_n}\right| \text{ et } \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| > \varepsilon \quad \text{on ait} \left|\frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}\frac{X_n}{Y_n}\right| < 1$$

$$\text{si } \left|\frac{X_n}{Z_n}\right|, \left|\frac{Z_n}{X_n}\right|, \left|\frac{X_n}{Y_n}\right| \text{ et } \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| > \varepsilon \quad \text{on ait} \left|\frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}}\frac{X_n}{Z_n}\right| < 1$$

$$\text{si } \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right|, \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|, \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| \text{ et } \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > \varepsilon \quad \text{on ait} \left|\frac{Z_{n+1}}{Y_{n+1}}\frac{Y_n}{Z_n}\right| < 1$$

D'ailleurs quand n croît indéfiniment, A, B et C tendent vers 0, il en est de même de ε.

Soit H la plus grande des deux quantités $\left|\frac{Y_n}{X_n}\right|$ et $\left|\frac{Z_n}{X_n}\right|$. Je dis que H sera une fonction de n qui sera décroissante toutes les fois qu'elle sera comprise entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$.

En effet deux cas peuvent se présenter:

1°.
$$H = \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| > \left|\frac{Z_n}{X_n}\right|$$

$$\left|\frac{X_n}{Y_n}\right| = \frac{1}{H} > \varepsilon \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| > \varepsilon \left|\frac{X_n}{Z_n}\right| > \left|\frac{X_n}{Y_n}\right| > \varepsilon \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| > 1 > \varepsilon.$$

Donc $\left|\frac{Y_n}{X_n}\right|$ et par conséquent H est décroissant.

2°.
$$H = \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > \left|\frac{Y_n}{X_n}\right|$$

$$\left|\frac{X_n}{Y_n}\right| > \left|\frac{X_n}{Z_n}\right| > \varepsilon \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > \varepsilon \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| > 1 > \varepsilon.$$

Donc $\left|\frac{Z_n}{X_n}\right|$ et par conséquent H est décroissant.

Il résulte de là que H tend vers 0 comme nous l'avons fait voir dans le paragraphe précédent, à moins qu'il ne reste constamment supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$.

Si H est constamment supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, je dis que $\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|$ est une fonction constamment décroissante si elle est comprise entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On a alors en effet:

1° ou bien : $$H = \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon \quad \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| > \varepsilon \quad \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| > \varepsilon$$

et par conséquent: $$\left|\frac{Z_n}{X_n}\right| = \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| > 1 > \varepsilon.$$

2° ou bien : $$H = \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon \quad \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| > \varepsilon \quad \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| > \varepsilon$$

et par conséquent: $$\left|\frac{Y_n}{X_n}\right| = \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > 1 > \varepsilon.$$

Dans l'un et l'autre cas la fonction $\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|$ est décroissante. On en conclut en répétant le raisonnement que nous avons déja fait bien des fois que $\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|$ tend vers 0 en général et exceptionnellement vers l'infini.

Il y a donc trois cas possibles:

1er cas *général* $\lim H = 0 \quad \lim \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| = \lim \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| = 0 \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha.$

2ème cas *exceptionnel* $\lim H = \infty \quad \lim \left|\frac{X_n}{Y_n}\right| = \lim \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| = 0 \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta.$

3ème cas plus exceptionnel encore:

$$\lim H = \lim \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| = \infty \qquad \lim \left|\frac{X_n}{Z_n}\right| = \lim \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| = 0 \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \gamma.$$

Le même raisonnement s'applique sans difficulté au cas des équations d'ordre supérieur au 3ème. Je me bornerai à indiquer ici la marche du raisonnement dans le cas du 4ème ordre.

Soient α, β, γ, δ les racines de l'équation (2) rangées par ordre de module décroissant. Nous poserons:

$$u_{n+i} = \alpha^i X_n + \beta^i Y_n + \gamma^i Z_n + \delta^i T_n. \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

Nous démontrerons ensuite qu'il existe un nombre ε tendant vers 0 avec $\frac{1}{x}$ et jouissant des propriétés suivantes:

1° la fonction $\left|\frac{Y_n}{X_n}\right|$ ou $\left|\frac{Y}{X}\right|$, en supprimant l'indice n pour abréger, est décroissante toutes les fois que $\left|\frac{Y}{X}\right|, \left|\frac{X}{Y}\right|, \left|\frac{X}{Z}\right|, \left|\frac{X}{T}\right|, \left|\frac{Y}{Z}\right|, \left|\frac{Y}{T}\right|$ sont plus grands que ε.

2°. Il en est de même de $\left|\frac{Z}{X}\right|$ toutes les fois que $\left|\frac{Z}{X}\right|, \left|\frac{X}{Z}\right|, \left|\frac{X}{Y}\right|, \left|\frac{X}{T}\right|, \left|\frac{Z}{Y}\right|, \left|\frac{Z}{T}\right|$ sont plus grands que ε, et ainsi de suite en considérant successivement les fonctions $\left|\frac{T}{X}\right|, \left|\frac{Z}{Y}\right|, \left|\frac{T}{Y}\right|, \left|\frac{T}{Z}\right|$ qui sont décroissantes à des conditions analogues, faciles à former par des permutations des lettres.

Cela posé, soit H la plus grande des quantités

$$\left|\frac{Y}{X}\right|, \left|\frac{Z}{X}\right|, \left|\frac{T}{X}\right|$$

et H_1 la plus grande des quantités :

$$\left|\frac{Z}{Y}\right|, \left|\frac{T}{Y}\right|.$$

On démontre que H est décroissant quand il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On en conclut qu'en général H tend vers 0 et par conséquent $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vers α.

Il y a exception quand H est toujours plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$, mais alors on démontre que H_1 est toujours décroissant s'il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On en conclut qu'en général H_1 tend vers 0 et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vers β.

Il y a encore exception quand H_1 est toujours plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$, mais alors on démontre que $\left|\frac{T}{Z}\right|$ est toujours décroissant s'il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On en conclut qu'en général $\left|\frac{T}{Z}\right|$ tend vers 0 et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vers γ.

Enfin il reste un dernier cas plus exceptionnel encore que les deux précédents, et où $\left|\frac{T}{Z}\right|$ reste toujours plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers δ.

Il me reste à examiner les cas où l'équation (2) a deux racines égales, ou deux racines de même module.

Supposons d'abord trois racines α, β, γ dont deux égales, par exemple

$$\alpha = \beta \qquad |\alpha| = |\beta| > |\gamma|.$$

Nous poserons:
$$u_n = X_n + Y_n + Z_n,$$
$$u_{n+1} = \alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)X_n + \alpha Y_n + \gamma Z_n,$$
$$u_{n+2} = \alpha^2\left(1+\frac{2}{n}\right)X_n + \alpha^2 Y_n + \gamma^2 Z_n,$$
d'où:
$$u_{n+1} = X_{n+1} + Y_{n+1} + Z_{n+1},$$
$$u_{n+2} = \alpha\left(1+\frac{1}{n+1}\right)X_{n+1} + \alpha Y_{n+1} + \gamma Z_{n+1},$$
$$u_{n+3} = \alpha^2\left(1+\frac{2}{n+1}\right)X_{n+1} + \alpha^2 Y_{n+1} + \gamma^2 Z_{n+1}.$$
Posons maintenant:
$$\alpha^3 + Q_2\alpha^2 + Q_1\alpha + Q_0 = A,$$
$$3\alpha^2 + 2Q_2\alpha + Q_1 = B,$$
$$\gamma^3 + Q_2\gamma^2 + Q_1\gamma + Q_0 = C,$$
il vient:
$$X_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\alpha X_n + A',$$
$$Y_{n+1} = \alpha Y_n + B',$$
$$Z_{n+1} = \gamma Z_n + C',$$
A', B' et C' étant des fonctions linéaires en A, B et C, ayant des coëfficients dépendant de X_n, Y_n, Z_n. A, B et C tendent vers 0 quand n croît indéfiniment, et on verrait comme précédemment qu'il en est de même, en général, de A', B' et C'. Il en résulte que *en général*
$$\lim\frac{Y_n}{X_n} = \lim\frac{Z_n}{Y_n} = 0, \qquad \lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha.$$

Voici maintenant une propriété qui subsiste alors même que l'équation (2) admet des racines de même module et qui par conséquent ne souffre aucune exception.

Soit a une quantité de module plus grand que toutes les racines de l'équation (2); l'éxpression $\frac{u_n}{a_n}$ tend vers 0, quand n croît indéfiniment.

La démonstration serait la même que pour la propriété correspondante des équations différentielles démontrée à la fin du paragraphe précédent.

§3. *Transformation de Bessel.*

Revenons maintenant aux équations différentielles. Nous avons vu dans le §1 que si l'on envisage l'intégrale générale y de l'équation

(1) $$\Sigma P_k \frac{d^k y}{dx_k} = 0,$$

étudiée dans ce paragraphe, la dérivée logarithmique

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

tend vers une certaine limite α, mais qu'on n'en pouvait pas conclure *immédiatement* que $ye^{-\alpha x}$ tend vers une limite finie et déterminée. C'est pourtant ce qui a lieu *en général;* mais pour le démontrer, nous serons forcés d'employer la transformation de ~~Bessel~~. Laplace

Voici en quoi consiste cette transformation. On pose

$$y = \int v e^{zx} dz,$$

v étant une fonction de z qu'il reste à déterminer et l'intégrale étant prise le long d'un chemin imaginaire convenablement choisi. L'intégration par parties donne :

$$xy = \int v x e^{zx} dz = [v e^{zx}] - \int \frac{dv}{dz} e^{zx} dz.$$

Le chemin d'intégration devra être choisi de telle façon que le terme tout connu de cette intégration par parties soit nul, sans cependant que l'intégrale y le soit elle-même.

On aura ensuite :

$$x^2 y = -\int \frac{dv}{dz} x e^{zx} dz = -\left[\frac{dv}{dz} e^{zx}\right] + \int \frac{d^2 v}{dz^2} e^{zx} dz,$$

ou si le terme tout connu est supposé nul :

$$x^2 y = \int \frac{d^2 v}{dz^2} e^{zx} dz.$$

Et ainsi de suite ; on aura :

$$x^i y = (-1)^i \int \frac{d^i v}{dz^i} e^{zx} dz \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots p)$$

pourvu que le chemin d'intégration ait été choisi de telle sorte que les termes tout connus des intégrations successives par parties :

$$\left[\frac{d^i v}{dz^i} e^{zx}\right] = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots p-1).$$

De même, on aura :

$$x^i \frac{d^k y}{dx^k} = (-1)^i \int \frac{d^i (v z^k)}{dz^i} e^{zx} dz,$$

pourvu que les termes tout connus :

$$\left[\frac{d^i v}{dz^i} z^k e^{zx}\right]$$

soient nuls aux deux limites d'intégration.

Si nous écrivons l'équation (1) sous la forme :

$$\Sigma C_{ik} x^i \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots p \\ k = 0, 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

l'équation transformée s'écrira:

(3) $$\Sigma C_{ik}(-1)^i \frac{d^i(vz^k)}{dz^i} = 0,$$

Pour trouver les points singuliers de cette équation (3), il suffit d'égaler à 0, le coëfficient de $\frac{d^p v}{dz^p}$. On trouve ainsi l'équation:

$$\Sigma C_{pk} z^k = 0,$$

u\ où en reprenant les notations du §1:

(2) $$\Sigma A_k z^k = 0,$$

ce qui est l'équation (2) du dit paragraphe.

Il faudrait ajouter à ces points singuliers le point ∞ où les intégrales sont irrégulières pour l'équation (3) comme pour l'équation (1). Si l'équation (2) n'a pas de racine multiple, ce que nous supposerons d'abord, le coëfficient de $\frac{d^p v}{dz^p}$ ne s'annule que du premier ordre en chacun des points singuliers, d'où il résulte que pour chacun de ces points l'équation déterminante $p-1$ racines respectivement égales à $0, 1, 2, \ldots p-2$, la $p^{\text{ème}}$ étant quelconque. Ce sont donc des points singuliers *réguliers*.

Il faut maintenant choisir le chemin d'intégration de façon à satisfaire aux conditions que nous nous sommes imposées. Nous devons choisir les deux limites de ce chemin de façon qu'en chacune d'elles on ait:

$$\frac{d^i v}{dz^i} z^k e^{zx} = 0, \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots p-1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}.$$

Si l'une de ces limites est à distance finie, on devra avoir:

$$\frac{d^i v}{dz^i} = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1),$$

sans que l'intégrale v soit identiquement nulle. *Cette limite devra donc être un point singulier.* Cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante. Il faut encore qu'en ce point singulier, où comme nous l'avons vu $p-1$ des racines de l'équation determinante ont pour valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-2$, la $p^{\text{ème}}$ racine de cette équation soit plus grande que $p-1$ et de plus que l'intégrale v soit convenablement choisie.

Supposons maintenant une limite à distance infinie. On devra avoir

$$\lim \frac{d^i v}{dz^i} e^{zx} = 0,$$

et d'abord: $$\lim v e^{zx} = 0.$$

C'est le moment de recourir à la proposition établie à la fin du §1. Formons l'équation qui joue par rapport à l'équation (3) le même rôle que l'équation (2) par rapport à l'équation (1). Elle s'écrira:

(4) $$\Sigma C_{in}(-1)^i x^i = 0,$$

en appelant x l'indéterminée qui entre dans cette équation.

L'équation qui donne les points singuliers de l'équation (1) s'écrit d'autre part:

$$\Sigma C_{in} x^i = 0.$$

Si donc $a_1, a_2, \ldots a_q$ sont les points singuliers distincts de l'équation (1), les q racines distinctes de l'équation (4) sont $-a_1, -a_2, \ldots -a_q$. D'où, en appliquant les principes du §1, on verra que

$$\lim ve^{zx} = 0,$$

si z est réel positif et si en désignant par $R(u)$ la partie réelle d'une quantité imaginaire u, on a:

$$R(x) < R(a_1), \; R(x) < R(a_2), \ldots, \; R(x) < R(a_q).$$

Si maintenant z est imaginaire et si l'on a:

$$\arg z = \lambda.$$

$$R(xe^{-i\lambda}) < R(a_1 e^{-i\lambda}), \quad R(xe^{-i\lambda}) < R(a_2 e^{-i\lambda}), \ldots, \; R(xe^{-i\lambda}) < R(a_q e^{-i\lambda}),$$

le produit ve^{zx} tendra vers 0 quand z croîtra indéfiniment avec l'argument λ. Il est clair d'ailleurs qu'il en sera de même des diverses expressions:

$$\frac{d^i v}{dz^i} z^k e^{zk}.$$

Les hypothèses (5) sont donc suffisantes pour que le chemin d'intégration satisfasse aux conditions que nous nous sommes imposées.

On peut d'ailleurs remarquer que, si le point x est extérieur au polygone convexe qui, ayant pour sommets certains des points a, laisse tous les autres à son intérieur, on pourra toujours trouver une valeur de λ satisfaisant aux inégalités (5).

Supposons donc le point x extérieur à ce polygone que j'appellerai P. Voici quel chemin d'intégration nous ferons suivre du point z. Nous partirons de l'infini avec un argument satisfaisant aux inégalités (5) et après avoir décrit un certain chemin nous reviendrons à l'infini soit avec le même argument, soit avec un autre argument satisfaisant également à ces mêmes inégalités. Il faudra naturellement que le chemin ainsi décrit enveloppe un certain nombre de points singuliers (c'est à dire de racines de l'équation (2)); car sans cela, l'intégrale:

$$y = \int ve^{zx} dz,$$

serait identiquement nulle.

Nous pourrons supposer que ce chemin enveloppe *un seul* point singulier. En effet un contour enveloppant par exemple les points singuliers a_1 et a_2 peut toujours se décomposer en deux autres, enveloppant, le premier seulement le point a_1 et le second seulement le point a_2. Donc les intégrales qu'on obtiendrait par la considération des contours enveloppant plusieurs points singuliers, ne seraient que des combinaisons linéaires de celles que nous allons considérer et qui sont engendrées par des contours enveloppant un seul point singulier.

Soit a le point singulier enveloppé que nous supposerons d'abord être une racine *simple* de l'équation (2). Son équation déterminante qui est de degré p, a comme nous l'avons vu $p-1$ racines égales à $0, 1, 2, \ldots, p-2$, la $p^{\text{ème}}$ étant égale à
$$\mu \gtrless p-1.$$
Il résulte de là, que le point a *n'est pas un point singulier* pour $p-1$ intégrales de l'équation (3) *linéairement indépendantes* et que la $p^{\text{ème}}$ intégrale s'écrit:
$$v_p = (z-a)^{\mu}\phi(z),$$
$\phi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a, l'intégrale générale s'écrit donc:
$$v = A(z-a)^{\mu}\phi(z) + \psi(z) = Av_p + \psi(z)$$
$\psi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a. On a alors:
$$\int \psi(z)\, e^{zx}\, dz = 0,$$
d'où:
$$y = \int v e^{zx}\, dz = A\int v_p e^{zx}\, dz.$$

Ainsi, si l'on fait abstraction du facteur constant A, l'intégrale y ne dépend pas du choix de l'intégrale v.

Qu' arrive-t-il maintenant si a est une racine double de l'équation (2)?

Alors l'intégrale générale s'écrira:
$$v = Av_p + Bv_{p-1} + \psi(z),$$
A et B étant deux constantes arbitraires, $\psi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a, et v_p et v_{p-1} étant deux intégrales particulières. Il vient alors:
$$y = \int v e^{zx}\, dz = A\int v_p e^{zx}\, dz + B\int v_{p-1} e^{zx}\, dz.$$

Ainsi quelle que soit l'intégrale v choisie, on ne pourra jamais obtenir pour y plus de deux intégrales linéairement indépendantes.

De même si a est une racine multiple d'ordre plus élevé.

Ainsi à chaque racine simple de l'équation (2), correspond une intégrale de l'équation (1), à chaque racine multiple d'ordre m, correspondent m intégrales de cette même équation. On obtient donc en tout de la sorte n intégrales de l'équation (1) et comme cette équation est d'ordre n, on en a l'intégrale générale. Il resterait, il est vrai, à démontrer que ces n intégrales sont linéairement indépendantes, mais c'est ce qui ressortira de diverses propositions que nous établirons plus loin.

Nous n'avons examiné jusqu'ici que le cas où les deux limites d'intégration sont infinies ; il est aisé de prévoir, d'après ce qui précède, que les intégrales obtenues, en supposant qu'une ou deux des limites soient finies, ne seront que des combinaisons linéaires de celles que nous connaissons déjà.

Considérons de nouveau un point a qui soit une racine simple de (2) et soient :

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-2,\ \mu$$

les racines de l'équation déterminante correspondante. Soit :

$$v_p = (z-a)^{\mu}\phi(z),$$

une intégrale de (3), où $\phi(z)$ est holomorphe dans le domaine du point a. Soit :

$$y_1 = \int v_p e^{zx} dz,$$

l'intégrale correspondante de (1), la quadrature s'effectuant le long du contour défini plus haut, qui enveloppe le point singulier $z=a$.

Envisageons maintenant l'intégrale :

$$y_2 = \int_a^{\infty} v_p e^{zx} dz.$$

Nous supposerons, ce qui est toujours possible, que le chemin d'intégration reste constamment intérieur au contour le long duquel a été prise l'intégrale y. Si

$$\mu > p-1,$$

l'intégrale y_2 sera finie et sera une des intégrales de l'équation (1) d'après ce qu'on a vu plus haut. Mais on voit aisément qu'on aura :

$$y_1 = y_2(1-e^{2i\pi\mu}).$$

Les deux intégrales y_1 et y_2 ne diffèrent donc que par un facteur constant. Il résulte en même temps de là que l'intégrale y_2 est une intégrale de l'équation (1) toutes les fois qu'elle est finie, c'est à dire toutes les fois que :

$$\mu > -1.$$

Soient $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ les racines de l'équation (2) que nous supposerons toutes simples. Soient $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-2,\ \mu_i,$

les racines de l'équation déterminante relative au point singulier a_i. Il existera toujours une intégrale de la forme :

$$V_i = (z-a_i)^{\mu_i}\phi_i(z),$$

$\Phi_i(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a_i, et on en conclura l'existence d'une intégrale de l'équation (1)

$$Y_i = \int_{a_i}^{\infty} V_i e^{zx} dz,$$

pourvu que : $\mu_i > -1$.

Supposons donc d'abord que tous les μ sont plus grands que -1, de façon que les p intégrales Y_i existent, ou mieux encore supposons d'abord que tous les μ sont plus grands que $p-1$.

Joignons un point quelconque b à chacun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots a_n$ par des chemins $l_1, l_2, \ldots l_n$. Soit c_{ik} la valeur que prend au point b la dérivée $k^{\text{ème}}$ de V_i quand la variable va du point a_i au point b par le chemin l_i.

Posons maintenant : $$T_i = \int_{a_i}^{b} V_i e^{zx} dz,$$

l'intégrale étant prise bien entendu le long de l_i.

Il viendra, en appliquant à l'intégrale T_i la méthode d'intégration par parties,

$$(6) \quad x^m T_i = x^{m-1} e^{bx} c_{i0} - x^{m-2} e^{bx} c_{i1} + x^{m-3} e^{bx} c_{i2} \ldots \pm e^{bx} c_{i,\,m-1} \mp \int \frac{d^m V_i}{dz^m} e^{zx} dz.$$

Soit maintenant $d_{i.k.q}$ la valeur que prend au point b la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $V_i z^q$; il viendra de même :

$$(7) \qquad x^m \frac{d^q T_i}{dx^q} = x^{m-1} e^{bx} d_{i.0.q} - x^{m-2} e^{bx} d_{i.1.q} + \ldots \mp \int \frac{d^m (V_i z^q)}{dz^m} e^{zx} dz.$$

D'ailleurs il est clair que les $d_{i.k.q}$ s'expriment très simplement à l'aide de b et des $c_{i.k}$.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on substitue T_i à la place de y dans l'équation (1), le résultat de cette substitution s'écrira :

$$(8) \qquad \Delta(T_i) = g_{i.p-1} x^{p-1} e^{bx} + g_{i.p-2} x^{p-2} e^{bx} + \ldots + g_{i.0} e^{bx},$$

les coëfficients $g_{i.k}$ étant faciles à calculer en fonctions des $c_{i.k}$. Si n est plus grand que p on pourra trouver n nombres :

$$h_1, h_2, \ldots, h_n$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(9) \qquad \sum_1^n {}_i h_i g_{i.k} = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

Le nombre des solutions linéairement indépendantes des équations (9) sera alors de $n-p$.

On aura alors : $\Delta(\Sigma h_i T_i) = 0,$

ce qui veut dire que $\Sigma h_i T_i$ est une intégrale de l'équation (1). C'est une intégrale prise le long d'un chemin complexe, mais restant toujours à distance finie.

Il existe toujours $n-p$ pareilles intégrales linéairement indépendantes. Ces intégrales diffèrent essentiellement de celles dont une limite est infinie. Ces dernières ne sont valables que si le point x est extérieur au polygone P, d'après ce que nous avons vu plus haut; au contraire les intégrales telles que $\Sigma h_i T_i$, c'est à dire les intégrales prises le long d'un contour à distance finie, sont valables *quel que soit* x. De plus elles sont holomorphes dans toute l'étendue du plan.

Posons:
$$U_i = \int_b^\infty V_i e^{zx} dz,$$
d'où:
$$Y_i = T_i + U_i.$$

Les équations (9) peuvent d'ailleurs se remplacer par les équations plus simples qui suivent:
$$\Sigma h_i c_{ik} = 0.$$

Il suffit pour s'en convaincre de rechercher quelle est l'expression des coëfficients g_{ik} en fonctions des c_{ik}. Mais des équations ainsi transformées on déduit aisément l'identité suivante:
$$\Sigma h_i V_i = 0,$$
qui subsiste quel que soit z. On a par conséquent:
$$\Sigma h_i U_i = 0, \qquad \Sigma h_i T_i = \Sigma h_i Y_i.$$

Ces relations montrent d'abord que la nouvelle intégrale $\Sigma h_i T_i$ n'est pas linéairement indépendante des intégrales déjà connues Y_i; elles font voir ensuite, que lors même que tous les μ ne sont pas plus grands que $p-1$, l'éxpression $\Sigma h_i T_i$ reste une intégrale de l'équation (1) pourvu que les T_i et les Y_i soient finis, c'est à dire pourvu que tous les μ soient plus grands que -1.

Qu' arrive-t-il enfin si tous les μ ne sont pas plus grands que -1? La difficulté est aisée à tourner. Décrivons du point b comme point initial, un contour fermé revenant au point b après avoir enveloppé le point singulier a_i. Opérons de même pour chacun des points singuliers. Nous aurons ainsi n contours fermés $l_1, l_2, \ldots l_n$. Appelons T_i l'intégrale
$$\int V_i e^{zx} dz,$$
prise le long du contour l_i, ou ce qui revient au même, l'intégrale
$$\int v e^{zx} dz,$$
le long du même contour, v désignant une intégrale *quelconque* de l'équation (3). Appelons c_{ik} la valeur dont s'accroît la dérivée $k^{\text{ème}}$ de V_i quand on décrit le contour l_i, en partant du point b comme valeur initiale et revenant au point b comme valeur finale; appelons de même $d_{i.k.q}$ la valeur dont s'accroît la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $V_i z^q$ dans les mêmes circonstances.

Si l'on emploie ces notations, les équations (6), (7) et (8) subsisteront. Par conséquent si on a n nombres h_i satisfaisant aux équations:

$$\Sigma h_i c_{i.k} = 0, \tag{10}$$

l'expression $\Sigma h_i T_i$ sera une intégrale de l'équation (1). Cette expression jouit d'ailleurs de la propriété remarquable d'être holomorphe dans tout le plan.

Or les équations (10) admettent $n - p$ solutions linéairement indépendantes.

Donc *si* $n > p$, *l'équation* (1) *aura* $n - p$ *intégrales holomorphes dans tout le plan.*

Ce théorème peut d'ailleurs se démontrer directement.

Je n'insisterai pas davantage sur cette transformation de Bessel qui permet, comme on le sait, d'intégrer l'équation (1) lorsque $p = 1$.

§4. *Etude approfondie des Intégrales irrégulières.*

Nous allons maintenant nous servir des expressions précédentes des intégrales de l'équation (1) pour étudier la façon dont elles se comportent quand x croît indéfiniment, d'une manière plus précise et plus approfondie que nous n'avons pu le faire dans le §1.

Démontrons d'abord le résultat suivant. L'intégrale:

$$J = \int v e^{zx} dz,$$

(si x est positif et très grand, si $|v|$ reste constamment inférieur à une certaine quantité M et si le chemin d'intégration reste constamment à gauche de l'axe des parties imaginaires) tendra vers 0 quand x croîtra indéfiniment.

Soit en effet L la longueur totale du chemin d'intégration, et $-\xi$ la plus grande valeur de la partie réelle de z, de telle façon que le long du chemin d'intégration on ait: $$R(z) \leq -\xi.$$

Il vient alors $$\int |dz| = L, \qquad |e^{zx}| \leq e^{-\xi x},$$

d'où enfin: $$|J| \leq MLe^{-\xi x},$$

et $$\lim J = 0, \qquad \text{pour } x = \infty. \qquad C. Q. F. D.$$

Passons maintenant au cas où le chemin d'intégration restant toujours à gauche de la droite: $$R(z) = -\xi,$$

s'étend à l'infini par l'une de ses extrémités. Nous supposerons de plus que, quand z croît indéfiniment en suivant le chemin d'intégration, on peut trouver un nombre λ tel que $$\lim v e^{\lambda z} = 0.$$

Cela est toujours possible comme le prouve le §1, avec les fonctions v que nous avons à considérer.

Faisons encore une hypothèse sur le chemin d'intégration. Nous supposerons qu'il se compose d'un certain arc de courbe situé à distance finie, suivi d'une portion de ligne droite s'étendant à l'infini; pour tous les cas que nous avons déjà considérés ou que nous aurons à considérer dans la suite, rien ne s'oppose à cette hypothèse. Dans ces conditions on peut trouver un nombre μ tel que l'intégrale:

$$\int |e^{\mu z} dz|,$$

soit égale à une quantité finie L. On pourra également trouver un nombre M, tel que l'on ait constamment: $|ve^{\lambda z}| < M$.

Nous pourrons toujours supposer λ et μ réels. On aura alors:

$$J = \int ve^{\lambda z}.e^{z(x-\lambda-\mu)}.e^{\mu z} dz,$$

d'où:

$$|J| < LMe^{-\xi(x-\lambda-\mu)},$$

quand x croît indéfiniment, on a donc:

$$\lim J = 0. \qquad\qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

De même on verrait aisément que $x^m J$ tend encore vers 0, quelque grand que soit l'exposant m.

Nous allons maintenant étudier l'intégrale suivante:

$$J = \int_0^a ve^{zx} dz.$$

La limite supérieure d'intégration peut être une quantité finie a, ou bien être infinie, mais le chemin d'intégration restera toujours à gauche de l'axe des parties imaginaires. La fonction v sera assujettie aux mêmes conditions que plus haut; je supposerai de plus que dans le domaine du point 0, la fonction v peut se développer en série de la forme suivante:

$$(1) \qquad A_0 z^a + A_1 z^{a+1} + A_2 z^{a+2} + \ldots$$

a étant quelconque.

Je dis que dans ces conditions:

$$x^{a+1} J \quad \text{tend vers} \quad -\Gamma(a+1) A_0,$$

quand x croît indéfiniment.

En effet nous pouvons toujours supposer:

$$|A_n| < \mu\rho^n,$$

μ et ρ étant deux quantités convenablement choisies de telle façon que le rayon du cercle de convergence de la série (1) soit égal à $\frac{1}{\rho}$.

Nous pourrons décomposer le chemin d'intégration en deux parties, la 1ère intérieure à un cercle décrit du point 0 comme centre avec r pour rayon ($r\rho < 1$), la 2de extérieure à ce cercle. Nous aurons alors :

$$J = K + H,$$

K et H étant les deux parties de l'intégrale correspondant à ces deux parties du chemin d'intégration. D'après ce qui précède, il vient :

$$\lim x^{a+1} H = 0.$$

Il reste à chercher la limite de $x^{a+1} K$.

Nous pouvons écrire :

$$v = A_0 z^a + A_1 z^{a+1} + \ldots + A_m z^{a+m} + R_m,$$

R_m étant le reste de la série (1). Il vient alors :

$$(2) \quad K = A_0 \int z^a e^{zx} dz + A_1 \int z^{a+1} e^{zx} dz + \ldots + A_m \int z^{a+m} e^{zx} dz + \int R_m e^{zx} dz,$$

les intégrales étant prises le long de la première partie du chemin d'intégration. On aura :

$$|R_m| < \frac{\mu (r\rho)^{m+1} r^a}{1 - r\rho} \quad |e^{zx}| < 1.$$

Si donc l est la longueur de la première partie du chemin d'intégration, il viendra :

$$\left| \int R_m e^{zx} dz \right| < \frac{l\mu (r\rho)^{m+1} r^a}{1 - r\rho}.$$

On peut toujours prendre m assez grand pour que le second membre de cette inégalité soit aussi petit qu'on voudra. Mais on peut aller plus loin encore. Supposons, ce qui est toujours possible, que la première partie du chemin d'intégration soit rectiligne, et pour fixer les idées davantage encore, qu'elle se réduit au segment de droite $0, -r$. Il viendra alors :

$$\left| x^{a+1} \int_0^{-r} z^a e^{zx} dz \right| < \left| x^{a+1} \int_0^{-\infty} z^a e^{zx} dz \right| = \Gamma(a+1),$$

ou

$$x^{a+1} \int_0^{-r} |z^a e^{zx} dz| < \Gamma(a+1),$$

ou enfin :

$$\left| x^{a+1} \int R_m e^{zx} dz \right| < \frac{\Gamma(a+1) \mu (r\rho)^{m+1}}{1 - r\rho}.$$

Comme $r\rho$ est plus petit que 1, on pourra prendre m assez grand, quel que soit x, pour que le second membre de cette inégalité soit plus petit que $\frac{\varepsilon}{r}$, r étant indépendant de x.

Le nombre m est désormais déterminé et nous allons faire varier x. Le $q^{\text{ème}}$ terme du second membre de l'expression (2) s'écrit :

$$T_q = A_q \int_0^{-r} z^{a+q} e^{zx} dz,$$

Cherchons la limite de $T_q x^{\alpha+1}$; pour cela posons:

$$U_q = A_q \int_{-r}^{-\infty} z^{\alpha+q} e^{zx} dz;$$

On aura: $$\lim x^{\alpha+1} U_q = 0,$$

d'où: $$\lim x^{\alpha+1} T_q = \lim x^{\alpha+1} A_1 \int_0^{-\infty} z^{\alpha+q} e^{zx} dz = \lim \frac{-\Gamma(\alpha+q+1) A_q}{x^q}.$$

Cette limite est égale à 0 si q est positif et à $-\Gamma(\alpha+1) A_0$ si q est nul. Donc si l'on multiplie par $x^{\alpha+1}$ chacun des m premiers termes du second membre de (2), le premier des produits ainsi obtenus aura pour limite $-A_0\Gamma(\alpha+1)$ et les autres 0. Or nous pourrons toujours prendre x assez grand pour que chacun de ces produits diffère de sa limite d'une quantité moindre que

$$\frac{\varepsilon}{2m}.$$

On aura alors: $$|x^{\alpha+1} K + A_0 \Gamma(\alpha+1)| < \varepsilon,$$

d'où $$\lim x^{\alpha+1} J = \lim x^{\alpha+1} K = -A_0 \Gamma(\alpha+1). \qquad C. Q. F. D.$$

Nous allons enfin considérer l'intégrale suivante:

$$J = \int v e^{zx} dz,$$

prise le long d'un contour enveloppant le point 0.

Je supposerai qu' à l'intérieur de ce contour la fonction v soit partout holomorphe excepté au point 0 et que dans le voisinage de ce point cette même fonction puisse se mettre sous la forme (1). On peut remarquer que, dans cette expression (1), il n'est plus nécessaire de supposer $\alpha > -1$, comme nous avions dû le faire dans l'exemple précédent.

Nous allons faire croître x indéfiniment par valeurs réelles positives. Nous pouvons donc supposer que le contour d'intégration est formé comme il suit:

1° une portion de ligne droite AB venant de l'infini et se terminant à un certain point B.

2° un arc de courbe quelconque BC allant du point B au point $C = -r$, r étant une quantité positive très petite. Ces deux premières portions du contour seront tout entières à gauche de l'axe des parties imaginaires.

3° un cercle décrit du point 0 comme centre avec r pour rayon, commençant au point C pour finir au point C.

4° et 5° l'arc CB et la droite BA parcourus en sens inverse.

Nous poserons alors: $J = H + K + H'$,

H se rapportant à la portion ABC du contour, H' à la portion CBA, et K au petit cercle de rayon r.

Il vient alors d'après ce qui précède:

$$\lim x^{a+1} J = \lim x^{a+1} K.$$

On a d'autre part:

$$x^{a+1} K = A_0 x^{a+1} \int z^a e^{xz} dz + \ldots + A_m x^{a+1} \int z^{a+m} e^{xz} dz + \int R_m x^{a+1} e^{xz} dz.$$

On peut toujours supposer que m est assez grand pour que $a + m$ soit positif. Dans ce cas l'intégrale:

$$\int R_m x^{a+1} e^{xz} dz,$$

prise le long du cercle de rayon r est égale à:

$$(1 - e^{2i\pi a}) \int_0^{-r} R_m x^{a+1} e^{xz} dz.$$

Elle est donc plus petite en valeur absolue que:

$$|1 - e^{2i\pi a}| \frac{\Gamma(a+1) \mu (r\rho)^{m'+1}}{1 - r\rho},$$

et elle tend uniformément vers 0 quand m croît indéfiniment, et cela quel que soit x.

De même on a

$$\lim x^{a+1} \int z^{a+q} e^{xz} dz = 0, \qquad q > 0,$$

$$\lim x^{a+1} \int z^a e^{xz} dz = -(1 - e^{2i\pi a}) \Gamma(a + 1).$$

On déduit de là par le même raisonnement que plus haut

$$\lim x^{a+1} J = \lim x^{a+1} K = (e^{2i\pi a} - 1) A_0 \Gamma(a + 1). \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Le second membre prend la forme illusoire $0 \times \infty$ lorsque a est entier négatif. Mais dans ce cas il est aisé de voir que la fonction sous le signe $\int$ est méromorphe à l'intérieur du contour d'intégration. On a donc:

$$J = 2i\pi \left(A_0 \frac{x^{-a-1}}{(-a-1)!} + A_1 \frac{x^{-a-2}}{(-a-2)!} + \ldots + A_{-a-2} x + A_{-a-1} \right).$$

Pour passer au cas où le point singulier enveloppé par le contour d'intégration n'est pas 0, mais un point quelconque a, il suffit de changer z en $z + a$. Pour passer au cas où x croît indéfiniment, non plus par valeurs réelles positives, mais avec l'argument λ, il suffit de changer x en $xe^{i\lambda}$ en même temps que z en $ze^{-i\lambda}$. Les résultats se déduisent immédiatement de ceux qui ont été énoncés plus haut.

Il est aisé de voir comment ce qui précède peut s'appliquer aux intégrales de l'équation (1). Soient: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, les n racines de l'équation déterminante relative au point singulier a_i et v_i l'intégrale qui peut se mettre sous la forme:

$$(z - a_i)^{\mu_i} \phi_i(z),$$

ϕ_i étant holomorphe dans le voisinage du point a_i.

Nous allons faire tendre x vers ∞ avec l'argument λ. Soit maintenant l_i un chemin d'intégration dont les deux limites sont rejetées à l'infini et enveloppant le point singulier a_i. Nous supposerons que quand z tend vers l'infini le long de ce contour, son argument tend vers une limite λ' telle que:

$$\frac{\pi}{2} < \lambda + \lambda' < \frac{3\pi}{2}$$

par exemple vers $\pi - \lambda$.

Soit enfin: $$y_i = \int v_i e^{zx} dz,$$

l'intégrale étant prise le long du chemin l_i.

Pour achever de préciser le contour l_i, nous le formerons 1° de la droite $a_i + Re^{i(\pi-\lambda)}$, $a_i + \varepsilon e^{i(\pi-\lambda)}$, R et ε étant des quantités, la première infiniment grande, la seconde infiniment petite: 2° d'un cercle complet décrit du point a_i comme centre avec ε pour rayon; 3° de la droite $a_i + \varepsilon e^{i(\pi-\lambda)}$, $a_i + Re^{i(\pi-a)}$ parcourue en sens contraire. Ce contour pourra d'ailleurs être remplacé par tout autre contour équivalent.

Dans ces conditions, lorsque x croîtra indéfiniment avec l'argument λ, l'intégrale y_i se comportera comme

$$e^{a_i x} x^{-\mu_i - 1},$$

c'est à dire que le rapport $$y_i e^{-a_i x} x^{\mu_i + 1}$$

tendra vers une limite finie et déterminée.

Tel est le résultat, plus complet que celui que nous avions obtenu au §1, que nous permet d'atteindre la transformation de Bessel.

On remarquera d'abord le rôle important que joue dans ce résultat l'argument λ avec lequel x croît indéfiniment. On en conclura que les intégrales de l'équation (1) ne se comportent pas de la même manière quelle que soit la façon dont x tend vers l'infini.

Une autre conséquence importante, c'est que les n intégrales

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

sont linéairement indépendantes.

Faisons croître en effet x par valeurs réelles positives, et supposons que les n quantités $$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

soient rangées par ordre de parties réelles croissantes. (On peut toujours supposer qu'il n'y a pas deux de ces quantités qui aient même partie réelle, sans quoi on ferait croître x indéfiniment avec un argument différent de 0.)

Soit $$A_i = \lim e^{-a_i x} x^{\mu_i + 1} y_i, \qquad A_i \gtrless 0.$$

Supposons qu'il existe une identité linéaire entre nos n intégrales

(3) $$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0.$$

Multiplions l'identité par: $$e^{-a_n x} x^{\mu_n + 1},$$

et faisons croître x indéfiniment. L'identité devient à la limite:

$$C_n A_n = 0, \qquad \text{d'où } C_n = 0.$$

Effaçons le dernier terme de l'identité (3), multiplions la par:

$$e^{-a_{n-1} x} x^{\mu_{n-1}+1},$$

et faisons $x = \infty$. Il vient encore:

$$C_{n-1} A_{n-1} = 0, \qquad \text{d'où } C_{n-1} = 0.$$

En continuant de la sorte, on démontrerait successivement que tous les coëfficients C sont nuls, ce qui montre que nos n intégrales sont linéairement indépendantes. La transformation de Bessel conduit donc à l'intégrale générale de l'équation (1).

Il est aisé d'étendre ce raisonnement au cas où l'équation (2) a des racines multiples.

Dans le paragraphe (1), nous avons vu que si

$$R(a_n) > R(a_{n-1}) > R(a_{n-2}) > \ldots > R(a_1),$$

il *peut* y avoir certaines intégrales particulières dont la dérivée logarithmique tend non pas vers a_n, comme cela a lieu pour l'intégrale générale, mais vers a_{n-1}, vers a_{n-2}, ... ou vers a_1. Toutefois les principes de ce premier paragraphe ne nous permettaient pas d'affirmer que ces intégrales particulières existaient réellement. Ce que nous venons de dire démontre l'existence de ces intégrales particulières.

Comme application de ce qui précède, posons nous le problème suivant:

Reconnaître si l'équation (1) admet comme intégrale un polynôme entier.

Pour cela il faut d'abord que l'une des racines de l'équation (2) soit nulle. Supposons qu'elle soit simple; soit par exemple:

$$a_i = 0.$$

Il faudra ensuite que la quantité que nous avons appelée μ_i soit entière négative. Quand μ_i est entier, il n'existe pas en général d'intégrale de l'équation (3) de la forme: $$v_i = (z - a_i)^{\mu_i} \phi_i(z),$$

car le point singulier a_i est en général un point singulier *logarithmique*. Si l'intégrale v contient des logarithmes, l'intégrale:

$$y_i = \int v e^{zx} dz,$$

prise le long d'un contour l_i enveloppant le point 0 ne peut se réduire à un polynôme entier.

Mais dans certains cas particuliers, le point singulier 0 n'est pas logarithmique, il existe une intégrale de la forme :

$$v_i = z^{\mu_i}\phi_i(z),$$

ϕ_i étant holomorphe dans le voisinage du point 0. La fonction ve^{tz} est alors méromorphe à l'intérieur du contour l_i, d'où il résulte que l'intégrale y_i se réduit à un polynôme entier.

Ainsi pour que l'équation (1) admette pour intégrale un polynôme entier, il faut et il suffit :

1° que l'équation (2) ait une racine nulle.

2° que l'une des racines de l'équation déterminante relative au point singulier correspondant de l'équation (3) soit entière négative.

3° que ce point singulier ne soit pas logarithmique.

Cela peut d'ailleurs se vérifier directement.

§5. *Etude du groupe de l'équation* (1).

Chacun sait ce qu'on entend par *groupe d'une équation linéaire.* Lorsque la variable indépendante décrit un contour fermé autour d'un point singulier, les intégrales de l'équation subissent une substitution linéaire et c'est la combinaison de ces substitutions qui engendre le groupe de l'équation.

On sait également qu'une substitution linéaire est caractérisée principalement par ses multiplicateurs et que les multiplicateurs de la substitution relative à un point singulier, s'obtiennent immédiatement, lorsque les intégrales sont régulières dans le voisinage de ce point. En effet on les déduit aisément de l'équation déterminante relative à ce point.

Il n'en est plus de même quand le point singulier est irrégulier, c'est à dire quand les intégrales ne sont pas régulières dans le voisinage de ce point. On n'a alors pour le calcul des multiplicateurs que des méthodes d'approximation plus ou moins rapides.

C'est ce qui arrive pour l'un des points singuliers de l'équation (1), à savoir pour le point $x = \infty$. Ce point sera en effet *irrégulier* en général. Pour qu'il fût régulier, il faudrait que, le polynôme P_n étant de degré p, le polynôme P_{n-1} fût de degré $p-1$ au plus, le polynôme P_{n-2} de degré $p-2$ au plus, etc. Dans ce cas l'équation (2) aurait toutes ses racines nulles. Si on laisse de côté ce cas très particulier, on n'a pas de méthode rapide pour trouver les multiplicateurs de la substitution S que subissent les intégrales de l'équation (1) quand le point x décrit un cercle de rayon très grand.

Le groupe de l'équation (3) est dérivé de n substitutions fondamentales correspondant aux différents points singuliers de cette équation, c'est à dire aux différentes racines de l'équation (2). Si ces racines sont simples, les points singuliers correspondants sont réguliers. On peut donc trouver aisément les multiplicateurs de ces substitutions fundamentales, mais pour calculer les coëfficients du groupe lui-même, il faut employer des méthodes d'approximation.

Il y a toutefois entre le groupe de l'équation (3) et la substitution S, un lieu que je désirerais faire ressortir. Si nous supposons connu le groupe de l'équation (3), je dis que nous connaîtrons aussi la substitution S.

Voici sous quelle forme nous nous donnerons les coëfficients du groupe de l'équation (3). Considérons un point singulier quelconque a_i de cette équation; soient

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-2,\ \mu_i$$

les racines de son équation déterminante et

$$v_{i.1},\ v_{i.2},\ \ldots,\ v_{i.p}$$

les intégrales correspondantes de telle façon que:

$$v_{ik} = (z-a_i)^{k-1}\phi(z) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1),$$
$$v_{ip} = (z-a_i)^{\mu_i}\phi(z),$$

$\phi(z)$ étant holomorphe dans le voisinage du point a_i. Soit b_i un point très voisin du point a_i. Opérons de même pour chacun des points singuliers; joignons $b_i b_j$; quand la variable z ira de b_i en b_j en suivant la droite $b_i b_j$, les intégrales v_{ik} prendront certaines valeurs qui pourront s'exprimer linéairement à l'aide des intégrales $v_{j.k}$.

En d'autres termes, il y aura une substitution linéaire S_{ij} qui changera les intégrales v_{ik} dans les intégrales v_{jk}, de telle façon qu'on puisse écrire avec la notation symbolique ordinairement employée:

$$v_{ik} = v_{ik}.S_j.$$

La connaissance des substitutions S_j suffit pour déterminer le groupe de l'équation (3). Ce sont en effet les substitutions que j'ai appelées *auxiliaires* dans mon mémoire sur les groupes des équations linéaires (Acta Mathematica 4:3, p. 207). Il est à remarquer que ces substitutions ne sont pas indépendantes les unes des autres.

On voit aisément que si l'on connait $n-1$ des substitutions S_{ij} (convenablement choisies) on connaîtra toutes les autres (loc. cit. p. 207). Nous conserverons néanmoins, pour plus de symétrie dans les notations, les $n(n-1)$ substitutions S_{ij} et S_{ji}.

Nous achèverons de définir les intégrales v_{ik} grâce à la convention suivante :

1° si $k=p$, $\phi(z)$ se réduit à 1 pour $z=a_i$.

2° si $k<p$, $\phi(z)$ se réduit à 1 et ses $p-1-k$, premières dérivées s'annulent pour $z=a_i$.

Cela posé, supposons d'abord x réel positif et très grand. Supposons que les droites $a_i b_i$ qui sont très petites soient parallèles à l'axe des parties réelles et de telle façon que : $$R(b_i)<R(a_i).$$

Soit D_i une demi-droite parallèle à cet axe, partant du point b_i et s'étendant à l'infini du côté des parties réelles négatives. Soit C_i un cercle décrit du point a_i comme centre, avec $a_i b_i$ pour rayon. Soit l_i un contour formé de la droite D_i, du cercle C_i et de la droite D_i prise en sens contraire. Soit :

$$y_i=\int v_{ip}e^{zx}dz.$$

prise le long du contour l_i.

Supposons maintenant un chemin quelconque E_i partant du point b_i et s'étendant à l'infini de telle façon que l'argument de z tende vers la limite π. Soit L_i un contour formé du chemin E_i, du cercle C_i et du chemin E_i pris en sens contraire. Cherchons à évaluer l'intégrale :

$$J=\int v_{ip}e^{zx}dz,$$

le long du contour L_i.

Je puis toujours supposer que le chemin E_i ait été remplacé par un contour E_i' équivalent ; c'est à dire tel que l'on puisse transformer, par une déformation continue, E_i en E_i' sans franchir aucun point singulier. La valeur de l'intégrale J n'en sera pas changée.

Or on pourra toujours trouver un chemin E_i' équivalent à E_i et formé de la façon suivante ; ce chemin se réduira à une ligne brisée dont les sommets seront des points c_j infiniment voisins de divers points singuliers a_j. Le premier de ces sommets sera $b_i=c_i$. Le sommet suivant sera c_j, infiniment voisin d'un point singulier a_j, mais pouvant être différent de b_j. Puis viendra c_k infiniment voisin d'un point singulier a_k, et ainsi de suite. Enfin la ligne brisée E_i' se terminera par une demi-droite partant du dernier sommet, parallèle à l'axe des parties réelles et dirigée du côté des parties réelles négatives.

Nous pourrons supposer que le contour formé de la ligne brisée E_i' et de la demi-droite D_i ne contient pas à son intérieur d'autre point singulier que ceux qui sont infiniment voisins d'un des sommets de E_i'. Il est évidemment possible de déformer d'une manière continue ce contour, jusqu' à ce qu'il aille passer infiniment près de chacun des points singuliers qu'il contient à son intérieur (et cela sans lui faire franchir aucun point singulier).

Supposons maintenant que l'on étudie ce que devient l'intégrale v_{ip} lorsque la variable z partant du point b_i décrit la ligne brisée E_i'. Au moment où nous arriverons en un sommet c_j de cette ligne brisée, infiniment voisin d'un point singulier a_j, et que nous serons par conséquent dans le domaine de ce point singulier, l'intégrale v_{ip} pourra s'exprimer linéairement à l'aide des p intégrales:

$$v_{j.1},\ v_{j.2},\ \ldots,\ v_{j.p}$$

de telle façon qu'on aura:

$$v_{i.p} = A^i_{j.1} v_{j.1} + A^i_{j.2} v_{j.2} + \ldots + A^i_{j.p} v_{j.p}. \tag{4}$$

Les coëfficients $A^i_{j.k}$ peuvent être regardés comme connus, car leur valeur découle immédiatement de la connaissance des substitutions S_{ij}, c'est à dire de la connaissance du groupe de l'équation (3).

Cela posé, nous pouvons décomposer le contour L_i de la manière suivante: soit λ_i le contour formé de la ligne brisée E_i' et de la demi-droite D_i. Nous remplacerons L_i par le contour λ_i, par le contour l_i et par le contour C_i pris en sens contraire. Le contour total ainsi obtenu est évidemment équivalent à L_i.

L'intégrale:

$$\int v_{ip} e^{sx} dz,$$

prise le long de l_i n'est autre que y_i.

Si l'on appelle K la même intégrale prise le long de λ_i, on aura:

$$J = K(1 - e^{2i\pi\mu_i}) + y_i.$$

Maintenant si le contour λ_i contient un certain nombre de points singuliers

$$a_j,\ a_{j'},\ a_{j''},\ \ldots$$

on pourra le remplacer par les contours correspondants:

$$l_j,\ l_{j'},\ l_{j''},\ \ldots$$

L'intégrale

$$\int v_{ip} e^{sx} dz,$$

prise le long de l_j se réduit, en vertu de la relation (4) à:

$$y_i A^i_{jp},$$

il vient donc enfin:

$$J = (1 - e^{2i\pi\mu_i}) \Sigma_j A^i_{jp} y_j + y_i. \tag{5}$$

On voit que si μ_i est entier négatif et si le point a_i n'est pas logarithmique, il reste:

$$J = y_i,$$

quel que soit le chemin L_i.

Cela posé, voyons ce que deviendra l'intégrale y_i lorsque x, partant d'une valeur réelle positive très grande, reviendra à cette valeur après avoir décrit un cercle de rayon très grand. Pendant que x variera de la sorte, nous serons obligés de déformer le contour l_i le long duquel est prise l'intégrale y_i; car si l'on ne changeait pas ce contour, quand l'argument de x serait devenu plus grand que $\frac{\pi}{2}$, l'intégrale aurait cessé d'être finie car la valeur absolue de e^{zx} aurait pu devenir plus grande que toute quantité donnée.

Voici maintenant comment il faut déformer le contour l_i; nous conserverons le cercle C_i mais nous remplacerons la demi-droite D_i parcourue deux fois en sens inverse, par une ligne quelconque E_i qui partira du point l_i et s'étendra à l'infini et qui devra être également parcourue deux fois en sens contraire.

Nous nous arrangerons toujours pour que l'argument de x soit à chaque instant égal à π, moins l'argument que prend z en s'éloignant indéfiniment sur la ligne E_i. De plus il faudra que la ligne E_i dérive de la demi-droite D_i par déformation continue et cela sans jamais franchir aucun point singulier.

Quand l'argument de x sera revenu à la valeur 0, après un cercle complet, la ligne E_i (que d'ailleurs on peut toujours, comme nous l'avons vu, supposer réduite à une ligne brisée E_i') prendra une forme définitive F_i et l'argument de z à l'infini sur F_i sera égal à π.

Ainsi dans la figure (1), on a supposé 5 points singuliers a, b, c, d, e et on a figuré le cercle C_i, la droite D_i et la ligne F_i.

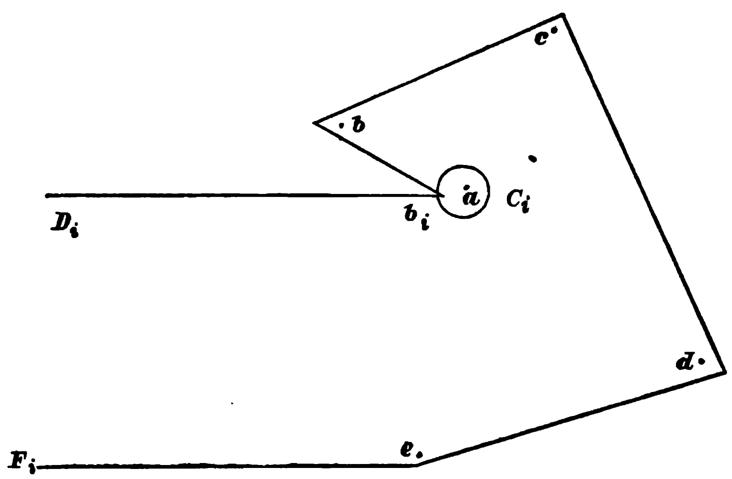

FIGURE 1.

L'intégrale prise le long du contour formé de la ligne F_i, du cercle C_i et de la ligne F_i prise en sens inverse, peut se calculer par le procédé que nous avons exposé un peu plus haut ; elle aura pour valeur :

$$(1 - e^{2i\pi\mu_i}) \Sigma A^i_{j.p} y_j + y_i,$$

en conservant les mêmes notations qu'au commencement de ce paragraphe. Mais cette intégrale n'est autre chose que ce que devient y_i quand x a décrit un cercle très grand.

Nous avons donc la valeur finale de y_i exprimée linéairement à l'aide des valeurs initiales des n intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$. En d'autres termes, quand nous connaissons le groupe de l'équation (3), nous connaissons aussi la substitution linéaire que subissent les intégrales de l'équation (1), lorsque la variable x décrit un cercle de rayon très grand. *C. Q. F. D.*

On peut d'ailleurs faire la remarque suivante. Si μ_i est entier négatif et que le point a_i ne soit pas logarithmique, la valeur finale de y_i ne diffère pas de la valeur initiale ; cette intégrale n'est pas altérée par la substitution linéaire que nous envisageons. On devait le prévoir puisque nous avons vu que cette intégrale se réduit alors à un polynôme entier.

§6. *Généralisation des* §§1 *et* 2.

Dans le paragraphe (2) nous avons considéré l'équation aux différences finies :

$$(1) \qquad P_k u_{n+k} + P_{k-1} u_{n+k-1} + \ldots + P_1 u_{n+1} + P_0 u_n = 0,$$

où les coëfficients sont des polynômes d'ordre p en n. Nous avons vu que la limite du rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

était en général celle des racines de l'équation

$$(2) \qquad A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

dont le module est le plus grand ; A_i désignant le coëfficient de n^p dans P_i.

Nous avons posé ensuite :

$$\frac{P_i}{P_k} = Q_i, \qquad \frac{A_i}{A_k} = B_i,$$

d'où

$$B_i = \lim Q_i \qquad (n = \infty)$$

et nous avons vu qu'on peut remplacer les équations (1) et (2) par les suivantes :

$$(1^{\text{bis}}) \qquad u_{n+k} + Q_{k-1} u_{n+k-1} + \ldots + Q_0 u_n = 0,$$

$$(2^{\text{bis}}) \qquad z^k + B_{k-1} z^{k-1} + \ldots + B_0 = 0.$$

Nous avons vu également que le résultat subsiste encore, lorsque Q_i au lieu d'être le quotient de deux polynômes entiers de degré p en n, est une fonction *quelconque* de n, tendant vers la limite B_i quand n croît indéfiniment.

Si l'une des quantités B_i est infinie, on en conclut que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ croît indéfiniment avec n. C'est ce qui arrive en particulier quand le polynôme P_k est de degré inférieur à celui d'un des polynômes suivants P_i.

Il est nécessaire alors d'employer l'artifice suivant:

Posons: $$u_n = (n\,!)^\mu v_n,$$

μ étant une constante réelle positive qu'il s'agit de déterminer de telle façon que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tende vers une limite finie.

L'équation (1^{bis}) devient:

$$v_{n+k} + \frac{Q_{k-1}}{(n+k)^\mu} v_{n+k-1} + \frac{Q_{k-2}}{[(n+k)(n+k-1)]^\mu} v_{n+k-2} + \ldots = 0,$$

et il s'agit de déterminer μ de telle façon que, pour $n = \infty$, les expressions:

$$\frac{[(n+i)\,!]^\mu Q_i}{[(n+k)\,!]^\mu}, \tag{3}$$

soient toutes finies sans être toutes nulles. Pour cela, il suffit d'envisager le degré en n de chacune de ces expressions, c'est à dire l'exposant de la puissance de n par laquelle il faut la diviser pour que le quotient tende vers une limite finie quand n croît indéfiniment. Supposons que le coëfficient P_i de l'équation (1) soit un polynôme entier de degré p_i en n; Q_i sera alors de degré $p_i - p_k$.

Or $$\frac{(n+k)\,!}{(n+i)\,!},$$

est un polynôme d'ordre $k - i$ en n. Donc le degré en n de l'expression (3) est:

$$p_i - p_k - \mu(k - i).$$

Il faut donc donner à μ la plus petite valeur qui satisfasse aux inégalités

$$p_k + \mu k \geq p_i + \mu_i. \tag{4}$$

Si l'on choisit justement pour μ cette plus petite valeur, toutes ces inégalites seront satisfaites, de telle sorte que toutes les expressions (3) tendront vers une limite finie et une d'elles au moins se réduira à une égalité, de telle sorte que toutes les expressions (3) ne tendront pas vers 0.

On peut trouver graphiquement cette plus petite valeur de μ de la manière suivante; on marquera tous les points qui ont pour abscisse i et pour ordonnée p_i; on construira le polygone convexe qui enveloppe tous ces points, et celui des côtés de ce polygone qui aboutira au point $(k,\ p_k)$ nous donnera μ par son coëfficient angulaire. On trouvera dans la figure (2) un exemple de cette détermination de μ en supposant :

$$k = 5, \quad p_5 = p_4 = p_2 = 2, \qquad p_3 = p_1 = 3, \qquad p_0 = 4.$$

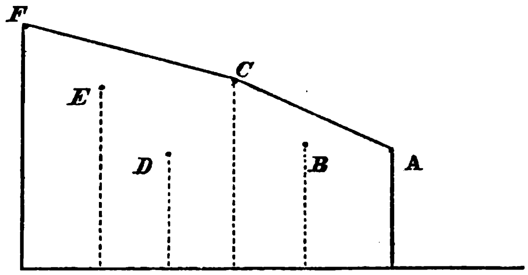

FIGURE 2.

Les points A, B, C, D, E, F correspondent respectivement aux polynômes P_5, P_4, P_3, P_2, P_1, P_0 et c'est le côte AC du polygone $ACFD$ dont le coëfficient angulaire donne la valeur de μ.

Soit alors C_i la limite de l'expression (3) pour $n = \infty$, on formera l'équation

$$(2^{\text{ter}}) \qquad C_k z^k + C_{k-1} z^{k-1} + \ldots + C_1 z + C_0 = 0.$$

Soit α celle des racines de cette équation qui a le module le plus grand, nous aurons :

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} (n+1)^{-\mu} = \alpha, \qquad (\text{pour } n = \infty).$$

Supposons maintenant que tous les B_i soient nuls, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tendra vers 0. Pour se rendre compte de la façon dont ce rapport tend vers 0, on cherchera encore la plus petite valeur de μ qui satisfasse aux inégalites (4) ; cette valeur sera cette fois négative. On posera :

$$u_n = (n\,!)^\mu v_n,$$

et l'équation (1^{bis}) deviendra :

$$(1^{\text{ter}}) \qquad \Sigma \left[\frac{(n+i)\,!}{(n+k)\,!}\right]^\mu Q_i v_{n+i} = 0,$$

on formera l'équation :

$$(2^{\text{ter}}) \qquad \Sigma C_i z^i = 0,$$

en appellant C_i la limite pour n infini, du coëfficient de v_{n+i} dans l'équation (1^{ter}).

Si l'on appelle ensuite α celle des racines de (2^{ter}) dont le module est le plus grand, on aura :

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} (n+1)^{-\mu} = \alpha. \qquad (\text{pour } n = \infty)$$

La même méthode peut s'appliquer aux équations:

(1) $$P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

(2) $$A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

(1^{bis}) $$\frac{d^n y}{dx^n} + Q_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + Q_1 \frac{dy}{dx} + Q_0 y = 0,$$

(2^{bis}) $$z^n + B_{n-1} z^{n-1} + \ldots + B_1 z + B_0 = 0,$$

envisagées dans le paragraphe (1).

Supposons que quelques uns des B deviennent infinis ou que tous les B deviennent nuls. Dans le premier cas la dérivée logarithmique de y tendra vers l'infini, dans le second cas vers 0.

On pourra toujours trouver deux nombres C_i et μ_i tels que

$$\lim \frac{Q_i}{C_i x^{\mu_i}} = 1. \qquad (\text{pour } x = \infty)$$

Si $\mu_i = 0$, $B_i = C_i$; si $\mu_i > 0$, $B_i = \infty$; si $\mu_i < 0$, $B_i = 0$.

On considérera alors l'équation

(2^{ter}) $$z_n + C_{n-1} x^{\mu_{n-1}} z^{n-1} + \ldots + C_1 x^{\mu_1} z + C_0 x^{\mu_0} = 0.$$

Si dans cette équation on pose $z = tx^\lambda$, elle devient;

$$\Sigma C_i x^{\mu_i - \lambda(n-i)} t^i = 0.$$

On donnera à λ une valeur telle que tous les exposants $\mu_i - \lambda(n-i)$ soient tous nuls ou négatifs, sans être tous négatifs; et faisant $x = \infty$ dans l'équation précédente, il viendra:

(2^{quater}) $$\Sigma C'_i t^i = 0,$$

où
$$C'_i = C_i \qquad \text{si } \mu_i = \lambda(n-i),$$
$$C'_i = 0 \qquad \text{si } \mu_i < \lambda(n-i).$$

L'équation (2^{quater}) en t aura alors toutes ses racines finies, sans qu'elles soient toutes nulles. J'appellerai α celle de ces racines dont la partie réelle est la plus grande. Je dis qu'on aura en général:

$$\lim x^{-\lambda} \frac{dy}{ydx} = \alpha.$$

Pour le démontrer, changeons de variable en posant:

$$\xi = x^\rho$$

ρ étant un exposant qu'il reste à déterminer; il viendra:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \Sigma_i D_{ik} x^{i\rho - k} \frac{d^i y}{d\xi^i} \, (i = 1, 2, \ldots k)$$

les D étant des coëfficients numériques.

L'équation (1^{bis}) devient alors :

$$\Sigma Q_k D_{ik} x^{i\rho-k}\frac{d^iy}{d\xi^i}=0. \tag{1^a}$$

Dans cette équation le coëfficient de $\frac{d^ny}{d\xi^n}$ s'écrit

$$D_{nn}x^{n\rho-n}.$$

Posons :
$$R_n=1 \quad R_i=\frac{\Sigma Q_k D_{ik}x^{i\rho-k}}{D_{nn}x^{n\rho-n}}.$$

Remplaçons dans R_i x par sa valeur $\xi^{\frac{1}{\rho}}$, et l'équation (1^a) deviendra

$$\Sigma R_i\frac{d^iy}{d\xi^i}=0. \tag{1^b}$$

Quel est le degré du coëfficient R_i en ξ? Le degré de Q_k est égal à $\frac{\mu_k}{\rho}$; posons :

$$\nu_k=\frac{\mu_k}{\rho}+\frac{n-k}{\rho}.$$

Le degré de R_i en ξ sera la plus grande des $n-i+1$ quantités

$$\nu_k+i-n \qquad (k=i,\ i+1,\ i+2,\ldots,n).$$

Nous voulons que les degrés de tous les R_i soient tous nuls ou négatifs sans être tous négatifs. Nous choisirons donc ρ de manière à satisfaire aux inégalités

$$\frac{\mu_k+n-k}{\rho}+i-n\leq 0 \qquad (i=1,\ 2,\ldots k).$$

Le degré de R_0 est d'ailleurs égal à $\frac{\mu_0+n}{\rho}-n$. Donc les inégalités précédentes peuvent se ramener aux suivantes :

$$\frac{\mu_k+n-k}{\rho}+k-n\leq 0 \qquad (k,=0,\ 1,\ 2,\ldots,n-1),$$

ou bien

$$\rho\geq\frac{\mu_k+n-k}{n-k}.$$

On prendra pour ρ la plus petite valeur qui satisfasse à ces inégalités. Comparons ρ à la quantité que nous avons appelée plus haut λ. Celle-ci était définie par les inégalités

$$\mu_k-\lambda(n-k)\leq 0,$$

ou

$$\lambda\geq\frac{\mu_k}{n-k}.$$

On a donc :

$$\rho=\lambda+1.$$

Si l'on donne à ρ cette valeur, les coëfficients R_i tendent vers des limites finies, quand x croît indéfiniment. Les conclusions du §1 sont donc applicables à l'équation (1^b). Formons donc l'équation (2^b) qui joue par rapport à (1^b) le même rôle que (2) par rapport à (1). Si nous posons :

$$\lim R_i=E_i \qquad (x=\infty)$$

cette équation s'écrira

$$(2^b) \qquad \Sigma E_i z^i = 0,$$

et si β est celle des racines de cette équation dont la partie réelle est la plus grande, on aura en général:

$$\lim \frac{dy}{yd\xi} = \lim \frac{x^{-\lambda}}{\rho} \frac{dy}{ydx} = \beta.$$

Il reste à déterminer E_i.

Pour cela reprenons l'expression:

$$R_i = \Sigma Q_k \frac{D_{ik}}{D_{nn}} x^{(i-n)\rho-k+n}.$$

Parmi les termes du second membre, il pourra y en avoir dont le degré en x est négatif et d'autres dont le degré en x est nul. Nous n'avons pas à tenir compte des premiers dont la limite est évidemment nulle pour x infini.

Or si $k > i$, les inégalités (5) montrent que le degré en x de

$$Q_k x^{(i-n)\rho-k+n}$$

est toujours négatif. Il reste donc:

$$E_i = \lim Q_i \frac{D_{ii}}{D_{nn}} x^{(i-n)(\rho-1)}.$$

Or il est aisé de voir que: $\qquad D_{ii} = \rho^i$

il reste donc: $\qquad E_i = C_i \rho^{i-n} \quad$ si $\mu_i = \lambda(n-i)$

et $\qquad E_i = 0 \quad$ si $\mu_i < \lambda(n-i)$

Donc pour passer de l'équation (2^b) à l'équation (2^{quater}), il suffit de poser:

$$z = \frac{t}{\rho}$$

il vient donc

$$\beta = \frac{\alpha}{\rho}$$

et

$$\lim x^{-\lambda} \frac{dy}{ydx} = \alpha.$$

C. Q. F. D.

On peut tirer de là une conclusion importante. Soit γ un nombre réel positif plus grand que la partie réelle de $\frac{\alpha}{\rho}$. Je dis que

$$v = ye^{-\gamma x^\rho}$$

tendra vers 0 quand x croîtra indéfiniment par valeurs réelles positives. Il viendra en effet

$$\frac{dv}{vdx} = \frac{dy}{ydx} - \gamma\rho x^\lambda$$

d'où

$$\lim x^{-\lambda} \frac{dv}{vdx} = \alpha - \gamma\rho,$$

ou

$$\lim R\left(x^{-\lambda} \frac{dv}{vdx}\right) = R(\alpha - \gamma\rho) < 0$$

$R(u)$ désignant toujours la partie réelle de u. Soit maintenant δ un nombre positif tel que: $R(\alpha - \gamma\rho) < -\delta < 0$.

Donc, à partir d'une certaine valeur x_0 de x, on aura:

$$R\left(\frac{dv}{vdx}\right) < -\delta x^{\lambda}$$

d'où:

$$|v| < |v_0| e^{-\frac{\delta x^\rho}{\rho}}$$

v_0 désignant la valeur de v pour $x = x_0$

$$\lim v = 0. \qquad C. Q. F. D.$$

Cette proposition, comme le résultat analogue démontré à la fin du §1 ne souffre aucune exception.

Une dernière remarque: comme ρ est essentiellement réel positif, la méthode précédente se trouve en défaut quand on a pour tous les μ_k

$$\frac{\mu_k}{n-k} + 1 \leq 0$$

ou

$$\mu_k \leq -(k-n).$$

Mais on n'a pas à s'inquiéter de ce cas d'exception, car les intégrales de l'équation (1) sont alors *régulières* pour x très grand.

§7. *Des Séries de Polynômes.*

Les conclusions des paragraphes 2 et 6 sont susceptibles d'une application importante. Elles permettent en effet de résoudre le problème suivant.

Soient: $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots$

une infinité de polynômes entiers en x, liés entre eux par une relation de récurrence de la forme suivante:

$$(1) \qquad Q_k P_{n+k} + Q_{k-1} P_{n+k-1} + \ldots + Q_1 P_{n+1} + Q_0 P_n = 0$$

où les Q sont des polynômes entiers en n et en x. Formons maintenant la série:

$$(2) \qquad \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots$$

où les α sont des coëfficients constants quelconques. Cette série sera convergente tant que le point x restera intérieur à une certaine région du plan, et divergera quand le point x sortira de cette région. On demande quelle est la courbe qui limite cette région de convergence.

J'avais donné une solution de ce problème dans une communication que j'ai faite à la Société Mathématique de France en Novembre 1882 et dans une note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 5 Mars 1883.

Voici quelle est la méthode que j'employais. J'envisageais la série suivante:

$$(3) \qquad y = P_0 + zP_1 + \ldots + z^n P_n \ldots$$

qui représente une fonction de z et de x. On voit aisément que cette fonction satisfait à une équation différentielle de la forme suivante :

$$(4) \qquad R_p \frac{d^p y}{dz^p} + R_{p-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \ldots + R_1 \frac{dy}{dz} + R_0 y = S$$

où les coëfficients R et le terme tout connu S sont des polynômes entiers en x et en z. On obtiendra les points singuliers des intégrales de cette équation (en regardant un instant x comme une constante et z comme la seule variable) en égalant à 0 le coëfficient R_p. Soit $z = \alpha$ celle des racines de l'équation $R_p = 0$ (qui est une équation algébrique en z) dont le module est le plus petit. La condition nécessaire et suffisante pour que la série (3) converge (en laissant de côté certains cas exceptionnels) c'est que :

$$\text{mod } z < \text{mod } \alpha.$$

Or α est évidemment une fonction de x. Donc pour une valeur quelconque supposée donnée de z, la courbe qui limitera la région de convergence de la série (3) dans le plan des x aura pour équation :

$$\text{mod } \alpha = \text{mod } z.$$

On en conclut aisément que, si les coëfficients de la série (2) sont tels que $\sqrt[n]{\alpha_n}$ tende vers une limite finie et déterminée quand n croît indéfiniment, la courbe qui limitera la région de convergence de la série (2) aura pour équation :

$$\text{mod } \alpha = \text{const.}$$

Cette méthode a, on le voit, l'inconvénient d'être sujette à objection lorsque $\sqrt[n]{\alpha_n}$ ne tend pas vers une limite déterminée.

Depuis, M. Pincherle a publié dans les Annali di Matematica un mémoire où il traite par la même méthode des questions analogues. (Sui sistemi di functioni analitiche . . . Série II, tome XII.)

M. Pincherle envisage une fonction quelconque $\phi(x, z)$, la développe en série selon les puissances croissantes de x et de z; il ordonne ensuite cette série suivant les puissances de z de telle façon qu'l'on ait :

$$(5) \qquad \phi(x, z) = \phi_0 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \ldots + \phi_n z^n + \ldots$$

$\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ étant des fonctions de x. Si l'on connaît les points singuliers de $\phi(x, z)$ considérée comme fonction de z, on trouvera aisément, comme nous venons de le voir, les conditions de convergence de la série (5). Considérant ensuite la série plus générale

$$(5^{\text{bis}}) \qquad \alpha_0\phi_0 + \alpha_1\phi_1 + \ldots + \alpha_n\phi_n + \ldots$$

où les α sont des coëfficients quelconques, M. Pincherle en détermine les conditions de convergence en recherchant un nombre tel que

$$\lim \alpha_n (R + \varepsilon)^{-n} = 0 \qquad \lim \alpha_n (R - \varepsilon)^{-n} = \infty \qquad (\text{pour } n = \infty)$$

quelque petite que soit la quantité positive ε. Il est clair alors que la série (5^{bis}) sera convergente ou divergente en même temps que

$$\phi_0 + \phi_1 R + \phi_2 R^2 + \ldots + \phi_n R^n + \ldots$$

Cette méthode, employée presque simultanément par M. Pincherle et par moi, est sujette à l'inconvénient que j'ai signalé plus haut. C'est ce qui m'a décidé à l'abandonner et à employer de préférence les résultats des paragraphes 2 et 6 du présent mémoire.

La relation de récurrence (1) est tout à fait analogue à l'équation (1) du paragraphe (2). Les polynômes P_n y jouent le même rôle que jouaient dans ce paragraphe les quantités inconnues u_n et les coëfficients Q sont des polynômes entiers en n, pourvu que nous regardions un instant x comme une constante.

La règle du paragraphe cité nous permettra donc de déterminer la limite du rapport:

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} \qquad (\text{pour } n = \infty).$$

Supposons en effet que les polynômes Q soient d'ordre p en n, et soit A_i le coëfficient de n^p dans Q_i. Formons l'équation:

$$A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0. \tag{6}$$

Elle sera analogue à l'équation (2) du §2.

Il est à remarquer que les coëfficients A sont des fonctions de x.

Imaginons que α soit celle des racines de l'équation (6) dont le module est le plus grand, α sera aussi une fonction de x et on aura en général:

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \alpha \tag{7}$$

et par conséquent:

$$\lim \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| = |\alpha|. \tag{8}$$

Cela posé, quelles sont les conditions de convergence de la série (2)?

Formons la série de puissances:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots \tag{9}$$

Elle aura un certain rayon de convergence ρ, c'est à dire qu'elle convergera pourvu que $|t| < \rho$.

Je dis que, si nous laissons de côté certains cas exceptionnels, sur lesquels nous reviendrons plus loin, la condition nécessaire et suffisante pour que la série (2) converge s'écrira: $|\alpha| < \rho$.

En effet considérons une valeur de x pour laquelle cette condition soit remplie. On trouvera toujours un nombre t tel que:

$$|\alpha| < |t| < \rho.$$

Pour cette valeur de t la série (9) convergera; de plus on aura à partir d'un certain rang:

$$|P_n| < t^n$$
$$|\alpha_n P_n| < |\alpha_n t^n|.$$

Donc tous les termes de la série (2) seront plus petits en valeur absolue que les termes correspondants d'une série convergente. Donc la série (2) convergera.

C. Q. F. D.

Supposons au contraire $|\alpha| > \rho$.

Nous choisirons t de telle façon que:

$$|\alpha| > |t| > \rho.$$

Il en résultera que la série (9) sera divergente et que la série (2) dont chaque terme est plus grand en valeur absolue que le terme correspondant de la série (9) divergera également. *C. Q. F. D.*

Il résulte de là que les *courbes de convergence* des séries de la forme (2), c'est à dire les courbes qui limitent les régions du plan où les séries de cette forme convergent, ont pour équation générale:

$$|\alpha| = \text{const.}$$

Voici quelques exemples: soit d'abord

$$(n^2 + 1) P_{n+2} - 2n^2 x P_{n+1} + (n^2 + x^2) P_n = 0,$$

la relation de récurrence qui lie trois polynômes P consécutifs.

Formons l'équation (6), elle s'écrira:

$$z^2 - 2zx + 1 = 0$$

et aura pour solution: $z = 2(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$

on en conclura que les courbes de convergence ont pour équations

$$|x \pm \sqrt{x^2 - 1}| = \text{const.}$$

si l'on a soin de choisir le signe + ou le signe — de telle façon que le premier membre soit aussi grand que possible.

Posons:
$$x = \tfrac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)$$

il viendra:
$$x^2 - 1 = \tfrac{1}{4}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)^2$$

d'où:
$$x \pm \sqrt{x^2 - 1} = \xi \text{ ou } \frac{1}{\xi}.$$

A chaque valeur de x correspondent deux valeurs de ξ dont le produit est égal à 1. L'une d'elles aura donc son module plus grand que 1, l'autre son module plus petit que 1. Nous choisirons celle dont le module est plus grand que 1. On aura alors:

$$|\xi| > \left|\frac{1}{\xi}\right|$$

et par conséquent les courbes de convergence auront pour équation

$$|\xi| = \text{const.}$$

Soit: $$|\xi| = t \qquad \xi = te^{i\phi}$$

il viendra: $$x = \tfrac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\cos\phi + \frac{i}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\sin\phi.$$

Les coordonnées du point x auront pour expression:

$$\tfrac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\cos\phi \text{ et } \tfrac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\sin\phi.$$

Pour avoir les courbes de convergence, il faudra donner à t une valeur constante et faire varier ϕ de 0 à 2π. On obtiendra ainsi une ellipse ayant pour foyers les points ± 1. Ce sont donc ces ellipses qui sont les courbes de convergence des séries de la forme:

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots$$

Comme deuxième exemple supposons que la relation de récurrence (1) s'écrive:

$$(n^2 + 1) P_{n+2} - 2n^2 x P_{n+1} + (n^2 x^2 - n^2) P_n = 0.$$

L'équation (6) s'écrira: $z^2 - 2zx + x^2 - 1 = 0$,

et aura pour racines: $$z = x \pm 1.$$

Si donc ρ est le rayon de convergence de la série $\Sigma\alpha_n t^n$, les conditions de convergence de la série $\Sigma\alpha_n P_n$ s'écriront:

$$|x + 1| < \rho \qquad |x - 1| < \rho.$$

La région de convergence se composera donc de la partie commune à deux cercles décrits avec ρ pour rayon, des points $+1$ et -1 comme centres. Les courbes de convergence seront donc formées de deux arcs de cercle de même rayon, ayant pour centres ces deux points et limités en leurs points d'intersection sur l'axe des parties imaginaires.

Il est à remarquer que ces deux cercles ne se coupent que si leur rayon est plus grand que 1. La série $\Sigma\alpha_n P_n$ ne converge donc pour aucune valeur de x si la série $\Sigma\alpha_n$ n'est pas convergente.

Passons donc maintenant aux cas d'exception dont j'ai parlé plus haut et que nous avions provisoirement laissés de côté. Le premier de ces cas se présente quand l'équation (6) a deux racines qui sans être égales, ont même module et de module plus grand que celui de toutes les autres. Ce cas ne se présentera en général que pour des valeurs particulières de x, à moins que l'équation (6) ne soit de la forme: $[z - \phi(x)][z - e^{i\alpha}\phi(x)]\,\Phi(z, x) = 0$

α désignant une constante, $\phi(x)$ une fonction de x et Φ un polynôme entier en z. Il arrive alors que le cas exceptionnel dont nous parlons se présentera pour toutes les valeurs de x ou pour toute une région du plan. Mais on pourrait voir que les résultats qui ont été exposés dans ce paragraphe n'en subsistent pas moins. Nous n'avons donc pas à nous inquiéter de ce premier cas exceptionnel.

Le second cas est plus important. Nous avons vu dans le §2 que si u_n est l'intégrale générale de l'équation (1) de ce paragraphe, et si $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, sont les racines de l'équation (2) rangées par ordre de module décroissant, on a *en général*:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = x.$$

mais que pour *certaines intégrales particulières* ou peut avoir:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta, \gamma, \ldots \text{ ou } \lambda.$$

Appliquons cela au cas qui nous occupe. Nous pouvons choisir arbitrairement nos k premiers polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$, les polynômes suivants $P_k, P_{k+1}, \ldots$ étant déterminés successivement par la relation de récurrence (1).

Soient $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, les racines de l'équation (6) rangées par ordre de module décroissant. On aura *en général* $\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \alpha.$

c'est à dire que si l'on choisit d'une manière quelconque les k premiers polynômes P_1 ce n'est que pour certains choix particuliers que cette relation pourra cesser d'être vraie et qu'on pourra avoir:

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \beta, \gamma, \ldots \text{ ou } \lambda.$$

Ainsi pour certains choix particuliers des premiers polynômes, il pourra y avoir exception. A quelle condition un pareil cas exceptionnel pourra-t-il se présenter?

Pour nous en rendre compte cherchons à former l'équation (4). Ecrivons le coëfficient Q_i de la relation (1) sous la forme suivante:

$$Q_i = A_{i.p}(n+i)_p + A_{i.p-1}(n+i)_{p-1} + \ldots + A_{i.2}(n+i)_2 + A_{i.1}(n+i)_1 + A_{i.0}(n+i)_0$$

où les A sont des polynômes entiers en x et où:

$$n_q = n(n-1)\ldots(n-q+1), \qquad n_1 = n, \qquad n_0 = 1.$$

Ecrivons de même: $A_{iq} = \Sigma B_{iqh} x^h$,

de telle façon que la relation (1) s'écrive:

$$\Sigma B_{iqh}(n+i)_q x^h P_{n+i} = 0.$$

Il est aisé maintenant d'écrire l'équation (4). Soit en effet:

$$\Sigma C_{mqh} z^m x^h \frac{d^q y}{dz^q}$$

le premier membre d'une équation de la forme (4). Substituons à la place de

y la série $\Sigma P_\nu z^\nu$; ce premier membre deviendra :

$$\Sigma C_{mqh} z^{m+\nu-q} x^h \nu_q P_\nu .$$

Nous devons nous arranger de telle sorte que tous les termes où l'exposant de z dépasse une certaine limite disparaissent. Posons :

$$i = q - m \qquad \nu = n + i \qquad m + \nu - q = m$$

et donnons à n une valeur déterminée suffisamment grande. Il devra venir :

$$\Sigma C_{mqh} x^h (n + i)_q P_{n+i}$$

en comparant avec la relation (1), il vient :

$$C_{mqh} = B_{iqh} .$$

Le premier membre de l'équation (4) s'écrit donc :

$$\Sigma B_{iqh} z^{q-i} x^h \frac{d^q y}{dz^q}$$

quant au second membre, on le trouvera aussi aisément. Le polynôme P_n n'est défini que pour les valeurs positives de n ; convenons, par définition, d'écrire :

$$P_{-1} = P_{-2} = \ldots = P_{-n} = \ldots = 0 .$$

Quand dans le premier membre de la relation (4), on fera $n = -1, -2, \ldots, -k$, le résultat de cette substitution ne sera pas nul ; appelons $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ le résultat de la substitution dans ce premier membre de ces diverses valeurs négatives de n.

On verra alors que le résultat de la substitution de $y = \Sigma P_n z^n$ dans le premier membre de l'équation (4) s'écrira :

$$\Pi_1 z^{-1} + \Pi_2 z^{-2} + \ldots + \Pi_k z^{-k} .$$

L'équation (4) s'écrira donc :

$$\Sigma B_{iqh} z^{q-i} x^h \frac{d^q y}{dz^q} = \Sigma \Pi_m z^{-m}$$

ou en la mettant sous forme entière :

$$\text{4)} \qquad \Sigma B_{iqh} z^{k+q-i} x^h \frac{d^q y}{dz^q} = \Sigma \Pi_m z^{k-m} .$$

Ainsi dans le premier des exemples cités plus haut, le premier membre de (4) s'écrira :

$$\frac{d^2 y}{dz^2} (z^4 - 2xz^3 + z^2) + \frac{dy}{dx} (z^3 - 2xz^2 - 3z) + y (x^2 z^2 - 2xz + S) .$$

En général une équation de la forme :

$$\Sigma R_i \frac{d^i y}{dz^i} S$$

(les R et S étant des polynômes entiers en z) présentera dans le voisinage du point $z = 0$ (et par conséquent dans le voisinage d'un point z quelconque) au moins une intégrale particulière holomorphe.

Il n'y aurait d'exception que si tous les polynômes R s'annulaient à la fois pour $z = 0$, ou si le point $z = 0$ était un point singulier logarithmique, ou plus généralement un point singulier dont l'équation déterminante admet des racines entières.

Il résulte de là que si l'équation privée de second membre

$$\Sigma R_i \frac{d^i y}{dz^i} = 0$$

admet p intégrales holomorphes linéairement indépendantes, l'équation à second membre en admettra $p + 1$ (ou n'en admettra aucune, dans les cas exceptionnels dont il vient d'être question).

Ainsi, si nous revenons à l'équation (4) qui nous occupe ici, le point $z = 0$ est pour l'équation sans second membre un point singulier ordinaire dont l'équation déterminante n'a pas en général de racines entières. Donc, en général, l'équation à second membre admettra une intégrale holomorphe et une seule, c'est l'intégrale :

$$\Sigma P_n z^n.$$

Egalons maintenant à 0 le coëfficient de $\frac{d^p y}{dz^p}$ ce qui donne :

$$\Sigma B_{ip h} z^{k+p-i} x^h = 0 \tag{9}$$

et, considérant dans cette équation x comme une constante, envisageons les diverses valeurs de z qui annulent le premier membre. Soit α celle de ces valeurs dont le module est le plus petit (à part $z = 0$, bien entendu). Dans le voisinage du point $z = \alpha$, (si α est une racine simple de l'équation (9)) l'équation à second membre (4) admettra en général p intégrales holomorphes linéairement indépendantes $j_1, j_2, \ldots, j_p$ et une $p + 1^{\text{ème}}$ non holomorphe j_{p+1} dont il sera aisé de trouver le développement.

Ces développements seront valables à l'intérieur d'un certain cercle ayant le point α pour centre, et c'est ce cercle que l'on peut appeler le domaine du point α, de même que le cercle qui a le point 0 comme centre et $|\alpha|$ comme rayon. et à l'intérieur duquel la série $\Sigma P_n z^n$ est certainement convergente, s'appellera le domaine du point 0.

Ces deux domaines ont une partie commune. Si dans cette partie commune, $\Sigma P_n z^n$ s'exprime linéairement à l'aide de $j_1, j_2, \ldots, j_p$, la série $\Sigma P_n z^n$ sera convergente pour des modules de z supérieurs à $|\alpha|$ et on aura :

$$\lim \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| > \left| \frac{1}{\alpha} \right|.$$

Mais cela n'arrivera pas en général.

Je n'en dirai pas plus long sur ce second cas exceptionnel, qui demanderait une étude plus approfondie, et je passerai à un troisième cas exceptionnel non moins important que les deux premiers.

Reprenons la relation de récurrence (1) et supposons que dans cette relation les coëfficients Q_i regardés comme des polynômes entiers en n, soient tous de degré inférieur au premier d'entre eux Q_k, ou bien que l'un des coëfficients Q_i soit de degré supérieur à Q_k. Il arrivera alors que l'équation (6) aura toutes ses racines nulles, ou bien aura une racine infinie. Nous avons appelé α celle des racines de cette équation (6) dont le module est le plus grand. Nous aurons ici:

$$|\alpha| = 0 \text{ ou bien } \infty$$

et par consequent:

$$\lim \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| = 0 \text{ ou bien } \infty.$$

La méthode exposée plus haut pour trouver les courbes de convergence des séries $\Sigma \alpha_n P_n$ se trouve donc en défaut, et c'est le cas d'appliquer les principes du §6. Posons:

$$P_n = P'_n (n!)^\mu.$$

Les séries $\Sigma \alpha_n P_n$ deviennent: $\Sigma \alpha_n (n!)^\mu P'_n$

et sont ordonnées suivant les polynômes P'_n au lieu de l'être suivant les polynômes P_n. Les courbes de convergence des séries de la forme $\Sigma \alpha_n P'_n$ seront donc les mêmes que celles des séries de la forme $\Sigma \alpha_n P_n$.

La relation de récurrence:

(1) $$\Sigma Q_i P_{n+i} = 0$$

devient: $$\Sigma Q'_i P'_{n+i} = 0$$

où $$Q'_i = Q_i \left[\frac{(n+i)!}{n!} \right]^\mu .$$

Nous avons vu dans le §6 qu'on peut toujours trouver une valeur de μ positive ou négative, telle qu'aucune des fonctions Q'_i (considérées comme fonctions de n) ne soit d'ordre supérieur à Q'_k et qu'une d'elles au moins ne soit pas d'ordre inférieur.

Soit alors q le degré de Q'_k de telle sorte que:

$$\lim \frac{Q'_k}{n^q} = A'_k \quad (n = \infty)$$

et soit:

$$\lim \frac{Q'_i}{n^q} = A'_i \quad (n = \infty).$$

Nous formerons l'équation:

(6^{bis}) $$\Sigma A'_i z^i = 0$$

dont les racines seront toutes finies sans être toutes nulles. Nous appellerons α'

celle d'entre elles dont le module est le plus grand; $|\alpha'|$ sera en général une fonction de x, et les courbes de convergence cherchées auront pour équation générale:

$$|\alpha'| = \text{const.}$$

Je prendrai pour exemple les polynômes de Legendre qui sont liés entre eux par la relation de récurrence bien connue:

(1) $$P_{n+2} - 2x(2n+3)P_{n+1} + 4(n+1)^2 P_n = 0.$$

Dans ce cas l'équation (6) s'écrit:

$$4 = 0$$

et l'on voit aisément alors qu'elle a deux racines infinies et que par conséquent la méthode générale est en défaut. Posons alors:

$$P_n = P'_n (n!)^\mu.$$

La relation (1) deviendra:

$$P'_{n+2}(n+2)^\mu (n+1)^\mu - 2x(2n+3)(n+1)^\mu P'_{n+1} + 4(n+1)^2 P'_n = 0$$

et si on prend $\mu = 1$, elle s'écrira:

(1^{bis}) $$(n^2 + 3n + 2)P'_{n+2} - 2x(2n+3)(n+1)P'_{n+1} + 4(n+1)^2 P'_n = 0$$

d'où l'on déduit l'équation:

(6^{bis}) $$z^2 - 4xz + 4 = 0.$$

Cette équation ayant pour racines

$$z = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

on en déduit comme plus haut que les courbes de convergence sont des ellipses ayant les points ± 1 pour foyers, ce qui est un résultat bien connu.

Un autre cas exceptionnel, que M. Gourier a bien voulu me signaler, est celui où les racines de l'équation (6) ou de l'équation (6^{bis}) sont indépendantes de x.

Prenons pour exemple les polynômes P_n définis par la relation

$$\frac{d^n}{dx_n}(e^{-x^2}) = P_n e^{-x^2}$$

et liés entre eux par la loi de récurrence:

(1) $$P_{n+2} + 2xP_{n+1} + 2(n+1)P_n = 0.$$

L'équation

(6) $$2 = 0$$

ayant ses racines infinies, nous poserons:

$$P_n = P'_n (n!)^{\frac{1}{2}}$$

d'où résulteront les équations:

(1^{bis}) $$\sqrt{(n+1)(n+2)}\, P'_{n+2} + 2x\sqrt{n+1}\, P'_{n+1} + 2(n+1)P'_n = 0$$

(6^{bis}) $$z^2 + 2 = 0.$$

Les racines de l'équation (6^{bis}) sont $\pm\sqrt{-2}$ et sont par conséquent indépendantes de x, de sorte que les règles précédentes se trouvent encore en défaut.

Pour traiter ce cas exceptionnel, imaginons d'abord une relation de récurrence :

(1) $$\Sigma Q_i P_{n+i} = 0$$

où les coëfficients Q_i sont des polynômes entiers en n et en x (ce qui, comme on le voit, n'est pas le cas de la relation (1^{bis})) et formons les équations (4) et (6) correspondantes :

(4) $$\Sigma R_q \frac{d^q y}{dz^q} = S$$

(6) $$\Sigma A_i z^i = 0.$$

Soit α celle des racines de (6) dont le module est le plus grand ; supposons que cette racine soit indépendante de x.

Que dire alors de la série $\Sigma \alpha_n P_n$? Si le rayon de convergence de la série $\Sigma \alpha_n t^n$ est plus grand que $|\alpha|$, la série $\Sigma \alpha_n P_n$ est *toujours* convergente ; si ce rayon est plus petit que $|\alpha|$, la série $\Sigma \alpha_n P_n$ n'est jamais convergente ; enfin si ce rayon est égal à $|\alpha|$, nous ne pouvons rien dire, ou plutôt le critérium fondé sur la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se trouve en défaut. On doit donc recourir à d'autres critères de convergence des séries ; par exemple à celui-ci.

On pose : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n}$$

et on cherche la limite de β_n pour $n = \infty$. Si cette limite a sa partie réelle plus grande que 1, la série est convergente ; si elle a sa partie réelle plus petite que 1, la série est divergente.

Appliquons ce principe au problème qui nous occupe.

Ecrivons la relation (1) sous la forme suivante, en ordonnant selon les puissances décroissantes de n :

$$n^p \Sigma A_i P_{n+i} + n^{p-1} \Sigma B_i P_{n+i} + \ldots = 0$$

les A_i et les B_i étant des polynômes en x indépendantes de n. Nous savons que l'équation

(6) $$\Sigma A_i z^i = 0$$

a une racine indépendante de x. Nous pouvons supposer que cette racine est égale à 1, car si elle était égale à α, nous poserions :

$$P_n = \alpha^n P'_n$$

et nous remplacerions les polynômes P_n par les polynômes P'_n ce qui ne changerait pas les courbes de convergence.

On aura donc : $$\Sigma A_i = 0.$$

J'appelle $F(z)$ le premier membre de l'équation (6), on aura :

$$F(1) = 0.$$

Soit donc :

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{\beta_n}{n}\right) \qquad P_{n+2} = P_n\left(1 - \frac{\beta_n}{n}\right)\left(1 - \frac{\beta_{n+1}}{n+1}\right)\ldots$$

Ecrivons maintenant la relation de récurrence (1) en remplaçant les P par ces valeurs et en ordonnant suivant les puissances décroissantes de n. Nous aurons en divisant par P_n :

$$n^p \Sigma A_i - n^{p-1}\Sigma A_i \gamma_{n.i} + n^{p-1}\Sigma B_i + \text{des termes en } n^{p-2}, n^{p-3}, \ldots = 0.$$

Dans cette formule, on a posé :

$$\gamma_{n.i} = \beta_n + \beta_{n+1} + \ldots + \beta_{n+i-1}.$$

Si $\lim \beta_n = \beta$, on aura $\qquad \lim \gamma_{n.i} = i\beta.$

Si l'on remarque que $\Sigma A_i = 0$, on verra que le terme en n^{p-1} qui est le premier terme s'écrit : $\qquad n^{p-1}(\Sigma B_i - \Sigma A_i \gamma_{n.i})$

A la limite ce terme doit s'annuler, ce qui donne :

$$\beta \Sigma i A_i = \Sigma B_i$$

ou

$$\beta = \frac{\Sigma B_i}{\Sigma i A_i} = \frac{\Sigma B_i}{F'(1)}.$$

Considérons alors une série : $\qquad \Sigma \alpha_n P_n$

où

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 - \frac{\gamma_n}{n} \quad \lim \gamma_n = \gamma.$$

La condition de convergence s'écrira :

$$R(\beta + \gamma) > 1.$$

Il résulte de là que les courbes de convergence ont pour équation générale

$$R(\beta) = \text{const.}$$

ou

$$R\left(\frac{\Sigma B_i}{F'(1)}\right) = \text{const.}$$

Ce résultat peut se rattacher à l'étude de l'équation (4) de la manière suivante. Pour cette équation le point $z = \frac{1}{\alpha}$ est un point singulier, mais nous avons montré plus haut comment on peut toujours supposer $\alpha = 1$. Le point singulier que nous avons à considérer est donc $z = 1$. On a alors :

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1$$

et la série $\Sigma P_n z^n$ qui est une intégrale de l'équation (4) est convergente dans le cercle de rayon 1. Nous supposerons que le point $z = 1$ est une racine simple de l'équation (6), alors les racines de l'équation déterminante correspondante seront : $\qquad 0, 1, 2, \ldots, p-2, \mu.$

Cherchons la valeur de μ. Le premier membre de l'équation (4) s'écrit, en reprenant des notations employées un peu plus haut:

$$\Sigma B_{iqh} z^{k+q-i} x^h \frac{d^q y}{dz^q}$$

ou:

$$\Sigma A_{iq} \frac{d^q y}{dx^q} z^{k+q-i}.$$

Or si l'on remarque que ces notations donnent:

$$A_i = A_{ip}$$

$$B_i = A_{i.p-1} + A_{ip}\left(pi - \frac{(p-1)(p-2)}{2}\right)$$

on verra que les deux premiers termes du premier membre de l'équation (4) seront:

$$\Sigma A_i z^{k+p-i} \frac{d^p y}{dz^p} - p\Sigma i A_i z^{k+p-i-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}}$$

$$+ \frac{(p-1)(p-2)}{2} \Sigma A_i z^{k+p-i-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \Sigma B_i z^{k+p-i-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}}$$

pour $z = 1$, le coëfficient de $\frac{d^p y}{dz^p}$ s'annule et si on le divise par $z - 1$, le quotient se réduit à $-F'(1)$; quant au coëfficient de $\frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}}$ il se réduit à

$$\Sigma B_i - pF'(1).$$

L'équation déterminante s'écrit alors:

$$-F'(1)\rho(\rho-1)\dots(\rho-p+1) + [\Sigma B_i - pF'(1)]\rho(\rho-1)\dots(\rho-p+2) = 0.$$

On tire de là

$$\mu = \frac{\Sigma B_i}{F'(1)} - 1$$

ou

$$\mu = \beta - 1.$$

Il est aisé d'apercevoir le défaut de ce raisonnement. Il *suppose* l'existence de la limite β; je crois qu'il n'y aurait pas de difficulté à *démontrer* cette existence mais cela m'entraînerait trop loin.

Parlons maintenant des cas où la méthode précédente ne s'applique pas, et d'abord revenons sur l'exemple dont nous avons parlé plus haut et considérons les polynômes:

$$P_n = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

L'équation (1^{bis}) ordonnée suivant les puissances décroissantes de n s'écrira:

$$n(P'_{n+2} + 2P'_n) + \sqrt{n}.\,2xP'_{n+1} + (\tfrac{3}{2}P'_{n+2} + P'_{n+1}) + \dots = 0.$$

La présence du terme en $\sqrt{n}$, empêche que la méthode précédente puisse s'appliquer. De plus une autre difficulté, spéciale également au cas qui nous occupe, vient encore s'ajouter à la première. En effet, l'équation:

$$(6^{\text{bis}}) \qquad z^2 + 2 = 0$$

a deux racines de même module. On en conclut que l'on peut poser

$$P'_n = Q_n + R_n$$

Q_n et R_n étant des fonctions de x telles que:

$$\lim \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = + i\sqrt{2} \quad \lim \frac{R_{n+1}}{R_n} = - i\sqrt{2}$$

tandis qu'en général $\frac{P'_{n+1}}{P'_n}$ ne tend vers aucune limite.

De plus Q_n et R_n satisfont à la même relation de récurrence que P'_n. Posons alors:

$$Q_n = Q'_n i^n 2^{\frac{n}{2}} \qquad R_n = R'_n (-i)^n 2^{\frac{n}{2}}$$

il viendra:

$$(1^{\text{ter}}) \qquad n(-Q'_{n+2} + Q'_n) + \sqrt{2n}\, 2ixQ'_{n+1} + \ldots = 0$$

$$(1^{\text{quater}}) \qquad n(-R'_{n+2} + R'_n) - \sqrt{2n}\,.\, 2ixR'_{n+1} + \ldots = 0.$$

Posons ensuite:

$$Q'_{n+1} = Q'_n\left(1 - \frac{\beta_n}{\sqrt{n}}\right); \; Q_{n+2} = Q'_{n+1}\left(1 - \frac{\beta_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right).$$

La relation (1^{ter}) ordonnée suivant les puissances décroissantes de n s'écrira:

$$\sqrt{n}(\beta_n + \beta_{n+1}) + \sqrt{2n}\, 2ixQ'_{n+1} + \ldots = 0$$

d'où

$$\lim \beta_n (n = \infty) = - 2ix\sqrt{2}.$$

Si de même on pose:

$$R'_{n+1} = R'_n\left(1 - \frac{\beta'_n}{\sqrt{n}}\right)$$

on trouvera:

$$\lim \beta'_n = 2ix\sqrt{2}.$$

Soit maintenant la série:

$$\Sigma a_n Q'_n$$

et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}} \quad \lim \gamma_n = \gamma = \gamma_0 + i\gamma_1.$$

La condition de convergence sera: partie réelle

$$(\gamma + 2ix\sqrt{2}) > 0.$$

En conséquence les conditions de convergence de la série

$$\Sigma a_n P'_n$$

s'écriront

$$(\text{partie imaginaire d'}x)^2 < \tfrac{1}{8}\gamma_0^2.$$

Les régions de convergence sont donc limitées par deux droites parallèles à l'axe des quantités réelles et situées de part et d'autre à égale distance de cet axe. L'ensemble de deux de ces droites forme une courbe de convergence.

De même, en supposant que les coëfficients de la relation (1) soient des polynômes entiers en n, au quel cas la difficulté précédente serait écartée, la méthode exposée plus haut serait encore en défaut, si $F'(1)$ était nul. Voici comment il faudrait opérer dans ce cas:

1°. Supposons que $F'(1)$ soit nul sans que ΣB_i le soit. On posera :

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma_n}{n}\right).$$

Supposons pour fixer les idées, $k = 2$; la relation (1) s'écrira :

$$Q_2\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} - \frac{\gamma_{n+1}}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma_n}{n}\right) + Q_1\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma_n}{n}\right) + Q_0 = 0.$$

Il vient en ordonnant suivant les puissances décroissantes de n et en posant :

$$Q_i = A_i n^p + B_i n^{p-1} + \dots$$

$$n^p(A_2 + A_1 + A_0) - \beta n^{p-\frac{1}{2}}(2A_2 + A_1) + n^{p-1}(B_2 + B_1 + B_0)$$
$$+ A_2 n^{p-1}\beta^2 + n^{p-1}(\gamma_{n+1}A_2 + \gamma_n A_2 + \gamma_n A_1) + \dots = 0.$$

Soit: $\lim \gamma_n = \gamma$ d'où $\lim(\gamma_{n+1}A_2 + \gamma_n A_2 + \gamma_n A_1) = \gamma F'(1)$

il viendra en tenant compte de :

$$F(1) = A_2 + A_1 + A_0 = 0$$
$$F'(1) = 2A_2 + A_1 = 0$$

et en divisant par n^{p-1}

$$A_2\beta^2 + B_2 + B_1 + B_0 + H = 0$$

H représentant des termes qui s'annulent avec $\frac{1}{n}$. On tire donc de là :

$$\beta^2 = \frac{\Sigma B_i}{A_2}$$

Les courbes de convergence ont pour équation générale :

partie réelle de $\beta =$ const.

2°. Supposons maintenant que $F'(1)$ et ΣB_i soient nuls à la fois; dans ce cas le point $z = 1$ est un point singulier pour l'équation (4) dans le voisinage duquel les intégrales sont régulières. (Elles sont irrégulières lorsque ($F'(1)$ est nul sans que ΣB_i le soit.) Les racines de l'équation déterminante seront :

$$0, 1, 2, 3, \dots, p-3, \mu' \text{ et } \mu''.$$

Si l'on pose

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{\beta_n}{n}\right)$$

on aura :

$$\lim \beta_n = \mu + 1$$

μ étant celle des racines μ' et μ'' dont la partie réelle est la plus petite.

§8. *Résumé.*

Dans ce travail je me suis proposé plusieurs buts, mais le premier et le plus important d'entre eux était de contribuer à l'etude des intégrales des équations linéaires dans le voisinage d'un point donné. Si en effet nos connaissances sont assez complètes à ce sujet lorsque le point donné est un point singulier à intégrales régulières, nous ne savons presque rien sur les intégrales irrégulières. J'ai cru qu'il ne serait pas inutile de montrer comment on peut trouver une fonction simple dont le rapport à l'intégrale étudiée tende vers l'unité quand on se rapproche du point singulier. C'était un premier pas dans l'étude de ces intégrales irrégulières.

Pour atteindre ce but, j'ai dû employer comme auxiliaire la transformation de Laplace, et j'ai été amené en passant, à compléter la théorie de cette transformation, comme nous le permettent les progrès récents de nos connaissances sur les variables imaginaires. J'ai rencontré ainsi deux théorèmes qui peuvent d'ailleurs se démontrer aisément sans l'aide de la transformation de Laplace.

En premier lieu, si une équation linéaire d'ordre n a pour coëfficients des polynômes de degré p en x, elle admettra $n-p$ intégrales indépendantes holomorphes dans tout le plan.

Le second théorème peut faciliter la recherche des cas où une équation linéaire admet comme intégrale un polynôme entier.

Les équations différentielles linéaires présentent la plus étroite analogie avec les équations aux différences finies de forme linéaire, ou en d'autres termes, avec les relations linéaires de récurrence entre $k+1$ quantités consécutives:

$$u_{n+k},\ u_{n+k-1},\ \ldots,\ u_{n+1},\ u_n.$$

Cette analogie se poursuit dans les résultats, et la même méthode qui permet d'étudier les intégrales irrégulières des équations différentielles, nous donne, dans les cas des relations de récurrence la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour n infini.

Ce résultat a une application immédiate dans la recherche des courbes de convergence des séries ordonnées suivant des polynômes, c'est à dire des séries de la forme:

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots$$

lorsque les P sont des polynômes entiers en x et qu'il y a une relation de récurrence entre $k+1$ polynômes consécutifs.

Ces considérations font comprendre comment j'ai été conduit à réunir dans un même travail des recherches en apparence très différentes et expliquent un défaut d'unité que je prie le lecteur de vouloir bien excuser.

PARIS, 10 *Novembre* 1884.

NOTE.—Dans le mémoire précédent il faut remplacer partout le nom de Bessel par celui de Laplace.