et posons

$$b_1 = 1 - \frac{1}{n'} - \frac{1}{q},$$
$$b_2 = 1 - \frac{1}{m'} - \frac{1}{q},$$
$$b_3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{m'} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q'}\right),$$
$$\lambda = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

» Formons alors le système correspondant S, dont nous désignerons par ω_1, ω_2 et ω_3 trois solutions linéairement indépendantes; les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donneront pour x et y des fonctions uniformes de u et v : ce sont des fonctions hyperfuchsiennes de ces variables. Elles n'existent pas pour toute valeur de u et v, et l'on peut choisir ω_1, ω_2 et ω_3, de telle sorte que le domaine dans lequel elles sont déterminées soit l'intérieur de l'hypersphère

$$u'^2 + u''^2 + v'^2 + v''^2 = 1,$$

en posant

$$u = u' + iu'' \quad \text{et} \quad v = v' + iv''.$$

» Dans un Mémoire précédent [*Sur des fonctions de deux variables, analogues aux fonctions modulaires* (*Acta. math.*, t. Ier)], j'ai fait l'étude d'un cas particulier rentrant dans le type général que je viens d'indiquer : c'est celui où l'on a

$$m = n = m' = n' = p = 3 \quad \text{et} \quad q = q' = \infty\ . \text{ »}$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la réduction des intégrales abéliennes.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Si un système d'intégrales abéliennes de première espèce et de genre n contient plus de n intégrales réductibles aux intégrales elliptiques, il en contient une infinité.

» Pour démontrer ce résultat, que les récentes découvertes de M. Picard devaient faire prévoir, je supposerai $n = 3$, afin de fixer les idées.

» Soient y_1, y_2, y_3 trois intégrales abéliennes, la première réductible aux intégrales elliptiques. M'appuyant sur un théorème de M. Weierstrass, je supposerai que le tableau des périodes normales de ces intégrales s'écrit

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & 0 & 0 & G & h & 0 & & (\text{pour } y_1), \\ 0 & 1 & 0 & h & G' & H & & (\text{pour } y_2), \\ 0 & 0 & 1 & 0 & H & G'' & & (\text{pour } y_3), \end{array}$$

h étant commensurable.

» Je dis que si l'intégrale $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ est réductible, il en sera de même de $\nu\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ (ν étant un nombre commensurable quelconque).

» En effet, les périodes de l'intégrale $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ s'écrivent

$$\varpi_1 = \alpha, \quad \varpi_2 = \beta, \quad \varpi_3 = \gamma,$$
$$\varpi_4 = G\alpha + h\beta, \quad \varpi_5 = h\alpha + G'\beta + H\gamma, \quad \varpi_6 = H\beta + G''\gamma.$$

» Pour que l'intégrale soit réductible, il faut et il suffit que ces périodes se réduisent à deux, c'est-à-dire qu'il y ait entre elles quatre relations linéaires à coefficients commensurables de la forme

$$(1) \quad A_i\varpi_1 + B_i\varpi_2 + C_i\varpi_3 + A'_i\varpi_4 + B'_i\varpi_5 + C'_i\varpi_6 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

» L'intégrale $\nu\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ a pour périodes

$$\varpi'_1 = \nu\alpha, \quad \varpi'_2 = \beta, \quad \varpi'_3 = \gamma,$$
$$\varpi'_4 = G\nu\alpha + h\beta, \quad \varpi'_5 = h\nu\alpha + G'\beta + H\gamma, \quad \varpi'_6 = H\beta + G''\gamma.$$

» Or les relations (1) peuvent s'écrire

$$(1\ bis) \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{A_i}{\nu} + hB'_i\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)\right]\varpi'_1 + \left[B_i + hA'_i\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\right]\varpi'_2 \\ &\qquad + C_i\varpi'_3 + \frac{A'_i}{\nu}\varpi'_4 + B'_i\varpi'_5 + C'_i\varpi'_6 = 0. \end{aligned} \right.$$

» Il y a donc, entre les six périodes ϖ', quatre relations linéaires à coefficients commensurables. Donc l'intégrale $\nu\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ est réductible. C. Q. F. D.

» On déduit aisément de là que, si le système d'intégrales du troisième genre considéré contient plus de trois intégrales réductibles, il en contient une infinité. Si les quatre intégrales y_1, y_2, y_3 et $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ sont réductibles, il en est de même de $\lambda\alpha y_1 + \mu\beta y_2 + \nu\gamma y_3$ (λ, μ et ν étant des coefficients commensurables quelconques).

» D'après le théorème de M. Weierstrass, cité plus haut, on peut toujours choisir les périodes normales pour que le Tableau des périodes d'une intégrale réductible s'écrive (pour $n = 3$, par exemple)

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad G \quad \frac{k}{D} \quad 0,$$

où le nombre entier D est l'entier caractéristique de la réduction.

» Il est toujours facile de déterminer cet entier. Supposons, en effet, que $n = 2$ et qu'on ait trouvé pour les périodes normales d'une intégrale réductible

$$|\alpha, \beta, \lambda\alpha + \mu\beta, \lambda'\alpha + \mu'\beta|,$$

λ, μ, λ' et μ' étant commensurables. L'entier caractéristique sera égal à $\mu - \lambda'$ divisé par la plus grande commune mesure des six quantités 1, λ, μ, λ', μ' et $\lambda\mu' - \lambda'\mu$.

» M^me de Kowalewski, étudiant un système d'intégrales abéliennes du troisième genre, a rencontré quatre intégrales réductibles sans que sa méthode lui en ait fait découvrir d'autres. Ce fait, en apparence contraire à ce qui précède, s'explique aisément, car elle ne s'est occupée que des intégrales pour lesquelles l'entier caractéristique D est égal à 2.

» Je terminerai par la remarque suivante :

» Soit un système d'intégrales du second genre et soit

$$\begin{matrix} 1 & 0 & G & H \\ 0 & 1 & H & G' \end{matrix}$$

le tableau des périodes normales de ces intégrales. Pour que ce système contienne des intégrales réductibles, il faut et il suffit qu'il y ait entre les périodes G, H et G' une relation de la forme

$$(GG' - H^2) - \lambda G' - \mu' G + (\lambda' + \mu)H + \lambda\mu' - \lambda'\mu = 0,$$

les coefficients λ, μ, λ', μ' étant commensurables.

» D'où cette conclusion qu'un système *quelconque* d'intégrales abéliennes diffère toujours *infiniment peu* d'un système réductible. »