ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les nombres complexes.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Les remarquables travaux de M. Sylvester sur les matrices ont attiré de nouveau l'attention dans ces derniers temps sur les nombres complexes analogues aux quaternions de Hamilton. Le problème des nombres complexes se ramène facilement au suivant :

» *Trouver tous les groupes continus de substitutions linéaires à n variables dont les coefficients sont des fonctions linéaires de n paramètres arbitraires.*

» Si un pareil groupe se réduit à un faisceau, les nombres complexes correspondants seront à multiplication commutative, et réciproquement.

» Voici maintenant quelques-uns des résultats auxquels on peut arriver par cette considération.

» Convenons d'écrire les coefficients d'une substitution quelconque sous la forme d'un Tableau à double entrée. Nous trouverons d'abord que les faisceaux qui donnent naissance à des nombres complexes à multiplication commutative rentrent tous dans des types analogues à ceux qui suivent, pourvu que les variables soient convenablement choisies.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & e & d & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix},$$

a, b, c, d, e désignant cinq paramètres arbitraires.

» Si l'on considère ensuite un groupe donnant naissance à des nombres complexes à multiplication non commutative, et une substitution quelconque S de ce groupe; si l'on forme l'équation aux multiplicateurs de cette substitution (équation aux racines latentes des matrices de M. Sylvester), cette équation aura toujours des racines multiples.

» De plus, les substitutions d'un pareil groupe ne pourront pas être toutes paraboliques.

» Supposons maintenant que les variables aient été choisies de telle sorte qu'une substitution S du groupe, non parabolique, soit ramenée à la forme canonique

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n).$$

» D'après ce que nous venons de voir, les λ ne pourront pas être tous distincts.

» Supposons qu'il y ait p valeurs distinctes de λ que nous appellerons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Nous diviserons les n variables en p systèmes :

$$x_{11}, \; x_{12}, \; \ldots, \; x_{1\alpha}; \; x_{21}, \; x_{22}, \; \ldots, \; x_{2\beta}; \; \ldots; \; x_{p1}, \; x_{p2}, \; \ldots, \; x_{p\varkappa},$$

où

$$\alpha + \beta + \ldots + \varkappa = n,$$

et nous supposerons que la substitution S s'écrive sous la forme

$$(x_{ik}, \lambda_i x_{ik}),$$

le multiplicateur étant ainsi le même pour toutes les variables d'un même système. Cela posé :

» 1° La substitution

$$(x_{ik}, \mu_i x_{ik})$$

fera partie du groupe quelles que soient les valeurs des p multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$;

2° Écrivons le Tableau à double entrée des coefficients d'une substitution quelconque du groupe, en conservant les mêmes variables dont il vient d'être question.

» Dans ce Tableau, séparons par des traits verticaux les α premières colonnes, puis les β suivantes, etc., puis les $\varkappa$ dernières. Séparons de même par des traits horizontaux les α premières lignes, puis les β suivantes, etc., puis les $\varkappa$ dernières. Nous avons partagé nos coefficients en p^2 systèmes. Si l'on choisit convenablement les n paramètres arbitraires en fonctions desquels tous les coefficients du groupe s'expriment linéairement, un quelconque d'entre eux ne pourra entrer que dans les coefficients *d'un seul* des p^2 systèmes.

» Il résulte de là :

» 1° Ou bien que les coefficients d'un des p^2 systèmes sont tous nuls :

c'est ce qui arrive, par exemple, au groupe à trois variables et trois paramètres

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix};$$

» 2° Ou bien qu'aucune des substitutions du groupe ne peut avoir plus de $\sqrt{n}$ multiplicateurs distincts. C'est ce qui arrive, par exemple, pour les quaternions. »

GÉOMÉTRIE. — *Sur l'involution des dimensions supérieures.* Note de MM. **J.-S.** et **M.-N. Vaněček**, présentée par M. Ossian Bonnet.

« Dans notre Mémoire intitulé : *Sur les lieux géométriques des dimensions supérieures*, que nous avons eu l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie (21 mai 1884), nous avons exposé rapidement la théorie de l'involution à un point de vue plus général qu'on ne l'a traitée jusqu'ici.

» En même temps, nous avons communiqué le passage le plus important du § VI des *Additions* à M. Le Paige, qui traite de l'involution superficielle dans un cas particulier (*voir* le n° 13 des *Comptes rendus*, 29 septembre 1884). Nous demandons la permission de le reproduire ici.

« § VI. *Sur l'involution.* — 283. Quand on veut obtenir les groupes de points qui sont en involution, il faut deux facteurs, savoir : une figure sur laquelle se trouvent ces groupes, et puis une seconde figure qui les produit sur la première figure.

» Par exemple, on sait qu'un faisceau de la première dimension de surfaces détermine sur une courbe des points qui forment une involution du premier rang, ce que nous pouvons exprimer ainsi : les éléments d'un lieu des surfaces de la troisième dimension rencontrent le lieu de la première dimension en des groupes de points qui forment une involution du premier rang.

» 284. Nous pouvons évidemment remplacer le support de la première dimension par un autre de la deuxième dimension.

» Considérons une surface S comme le support, et supposons que L soit un lieu des courbes de la deuxième dimension.

» Le lieu L rencontre la surface S en une courbe. Prenons un point quelconque sur cette courbe, et, quand il y a une seule courbe C du lieu L