» Il suffit maintenant de commencer les calculs qui conduisent aux nouvelles solutions, pour reconnaître que ces calculs n'exigeront plus aucune quadrature. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la reproduction des formes.* Note de M. H. Poincaré, présentée par M. Bouquet.

« Il est facile de trouver quelles sont les formes algébriques homogènes de $n$ variables qui se reproduisent par une substitution linéaire infinitésimale donnée, ou encore celles qui ne sont pas altérées par deux ou plusieurs substitutions linéaires infinitésimales *permutables* entre elles. Il reste à voir comment on peut trouver toutes les formes qui sont reproductibles par deux ou plusieurs substitutions linéaires infinitésimales *non permutables.* J'ai résolu ce problème pour quatre variables et deux substitutions dans le L[e] Cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique,* et depuis M. Lie a étendu la solution au cas de trois substitutions et de quatre variables, en considérant même des fonctions non algébriques. Je vais l'étendre maintenant au cas de deux substitutions et de $n$ variables. Je dis qu'une substitution est canonique lorsqu'elle est de la forme

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n).$$

» En général, une substitution linéaire quelconque peut se mettre sous la forme $T^{-1}ST$, S étant canonique; les substitutions qui font exception peuvent s'appeler *paraboliques,* puisque c'est ainsi qu'on les nomme dans le cas de deux variables. Je supposerai que, dans le groupe qui n'altère pas la forme envisagée, on peut toujours trouver une substitution non parabolique. Alors, en choisissant convenablement les variables, elle sera canonique.

» Cela posé, si une forme F est reproductible par une substitution linéaire infinitésimale, elle satisfera à une équation de la forme

$$\Sigma a_{ik} x_i p_k = 0, \tag{1}$$

où $p_k$ désigne la dérivée de F par rapport à $x_k$. L'une des substitutions étant canonique, son équation s'écrira

$$\Sigma b_i x_i p_i = 0. \tag{2}$$

Si A et B sont les premiers membres des équations (1) et (2) auxquelles satisfait F, cette forme satisfera également à

$$(3)\qquad [A, B] = \Sigma a_{ik}(b_i - b_k)x_i p_k = 0.$$

» Mais la substitution correspondante à (1) aura pu être choisie de telle sorte que

$$[A, B] = \lambda B,$$

$\lambda$ étant une constante qui ne peut être nulle, sans quoi les substitutions seraient permutables. Cette constante doit être égale à une ou plusieurs des différences $b_i - b_k$. Tous les termes de (3) qui contiendront un facteur $b_i - b_k$ différent de $\lambda$ devront être identiquement nuls, ainsi que les termes correspondants de (1).

» Soit F′ une forme de $n - 1$ variables reproductible par deux substitutions S et S′; tout polynôme entier en F′ et en $x_n$ sera une forme de $n$ variables reproductible par S et S′ (ces deux substitutions étant regardées comme n'altérant pas $x_n$).

» Si l'on suppose que la forme F ne dérive pas de la sorte d'une forme reproductible F′ de $n - 1$ variables, il faut que, si l'on écrit le tableau des différences $b_i - b_k$ qui sont égales à $\lambda$, chacune des lettres $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se trouve au moins une fois dans ce tableau.

» Supposons, par exemple,

$$(4)\qquad b_1 - b_2 = b_2 - b_3 = \ldots = b_{n-1} - b_n = \lambda.$$

» L'équation (1) se réduit alors à

$$(5)\qquad \sum_{q=1}^{q=n-1} a_{q,q+1} x_q p_{q+1} = 0.$$

» On trouve aisément $n - 1$ polynômes entiers $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ qui sont homogènes et respectivement de degré $1, 2, \ldots, n - 1$ et qui satisfont à l'équation (5). De toutes les formes reproductibles par nos deux substitutions, les polynômes P sont les plus simples et toutes les autres n'en sont que des combinaisons.

» Telle est la façon de traiter le problème quand toutes les équations (4) sont satisfaites. Mais il peut arriver :

» 1° Ou bien qu'une ou plusieurs des différences $b_q - b_{q+1}$ soient différentes de $\lambda$, sans que deux des quantités $b_i$ deviennent égales entre elles, d'où il résulte que toute différence qui n'est pas de la forme $b_q - b_{q+1}$ sera différente de λ. Ce cas se traite comme le précédent. La seule différence, c'est qu'un ou plusieurs des termes de l'équation (5) et des polynômes P disparaissent.

» 2° Ou bien que deux ou plusieurs des quantités $b_i$ deviennent égales entre elles. Supposons, par exemple, que $b_3, b_4$ et $b_5$ soient égaux entre eux. Alors la substitution qui correspond à l'équation (2) ne cesse pas d'être canonique quand on remplace $x_3, x_4$ et $x_5$ par des combinaisons linéaires de ces trois variables, et l'on peut choisir ces combinaisons linéaires de telle façon que l'équation (1) soit de la forme (5) et que les termes

$$a_{3,4}x_3p_4 + a_{4,5}x_4p_5$$

y soient nuls. On est donc encore ramené au cas où toutes les équations (4) sont satisfaites. »

CHIMIE MINÉRALE. — *Détermination de l'équivalent du nickel à l'aide de son sulfate.* Note de M. **H. Baubigny**, présentée par M. Debray.

« *Préparation du sulfate.* — Le nitrate commercial est dissous dans l'ammoniaque additionnée d'un peu de carbonate, et l'on filtre les produits précipités, l'oxyde de fer notamment; puis, ayant chassé par la chaleur la majeure partie de l'ammoniaque, on neutralise avec l'acide sulfurique, et l'on recueille le sulfate double qui se sépare. Ce sel, purifié par plusieurs cristallisations, est ensuite transformé en sulfate de nickel mêlé d'un peu d'oxyde en le chauffant au rouge sombre dans un moufle ouvert. Si l'on traite le produit pulvérisé par l'eau froide, où le sulfate anhydre de nickel ne se dissout que fort lentement, ceux de cuivre et de zinc, qui y sont très solubles, se dissolvent en grande partie, s'il en reste encore en quantité appréciable. En tout cas, les dernières traces de ces métaux sont séparées en totalité, si l'on sature *à froid* par HS la dissolution de sulfate de nickel (opérée à la fin à l'aide de l'eau bouillante) *préalablement* additionnée d'assez d'acide acétique cristallisable pour empêcher la précipitation du nickel [1].

» Les sulfures filtrés, la solution est évaporée à siccité, après avoir acidifié avec un peu d'acide nitrique, pour parer à la formation du sulfure de nickel sous l'influence de la chaleur. On calcine le sulfate et l'on dissout l'oxyde dans l'acide nitrique. Si, d'après la méthode de Fischer, on ajoute

[1] *Comptes rendus*, t. XCIV, p. 1715.