» La fonction numérique

$$\frac{x^n - \Sigma x^{\frac{n}{a}} + \Sigma x^{\frac{n}{ab}} - \ldots \pm x^{\frac{n}{ab\ldots c}}}{n}$$

ou $\frac{\Sigma_n(x)}{n}$, comme la désigne M. Picquet, s'est déjà présentée dans des recherches mathématiques (SERRET, *Algèbre supérieure*, n° 349; *Comptes rendus*, 14 février 1870, p. 328).

» On vérifie d'ailleurs aisément que $\Sigma_n(x)$ est divisible, quel que soit x, par a^α, plus haute puissance du facteur premier a divisant n. Il suffit de s'appuyer sur le théorème de Fermat généralisé : $y^{a^\alpha} - y^{a^{\alpha-1}}$ est divisible par a^α, quel que soit y. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les groupes des équations linéaires.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« 3. Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 12 mars dernier, j'ai montré que, pour former le groupe d'une équation linéaire, il suffisait de connaître, pour toutes les combinaisons deux à deux des points singuliers, quatre coefficients α, β, γ, δ, et que ces quatre coefficients s'exprimaient aisément par des séries lorsque, envisageant deux points singuliers a_1 et a_2, on pouvait construire deux cercles C_1 et C_2, ayant pour centres a_1 et a_2, ne contenant aucun autre point singulier et ayant une partie commune.

» Supposons maintenant que l'on trace deux figures F_1 et F_2, satisfaisant aux conditions suivantes : 1° elles auront une partie commune; 2° la figure F_1 contiendra le seul point singulier a_1 et la figure F_2 le seul point singulier a_2; 3° la figure F_1 se composera de la partie commune à deux cercles qui se couperont aux points α_1 et β_1 sous un angle $\pi\gamma_1$; la figure F_2 sera de même limitée par deux circonférences se coupant en α_2 et β_2 sous un angle $\pi\gamma_2$; il est évidemment toujours possible de construire deux pareilles figures.

» Les équations des quatre circonférences qui limitent les deux figures F_1 et F_2 seront

$$\arg\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_1} = \delta_1, \quad \arg\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_1} = \delta_1 + \pi\gamma_1,$$

$$\arg\frac{x-\alpha_2}{x-\beta_2} = \delta_2, \quad \arg\frac{x-\alpha_2}{x-\beta_2} = \delta_2 + \pi\gamma_2.$$

» Posons

$$\zeta_1 = \left(e^{-i\delta_1}\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \quad \zeta_2 = \left(e^{-i\delta_2}\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}},$$

$$h_1 = \left(e^{-i\delta_1}\frac{a_1-\alpha_1}{a_1-\beta_1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \quad h_2 = \left(e^{-i\delta_2}\frac{a_2-\alpha_2}{a_2-\beta_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}.$$

» Soient h'_1 et h'_2 les quantités imaginaires conjuguées de h_1 et de h_2. Posons encore

$$z_1 = \frac{\zeta_1 - h_1}{\zeta_1 - h'_1}, \quad z_2 = \frac{\zeta_2 - h_3}{\zeta_2 - h'_2}.$$

Si nous reprenons les notations de la Note citée, nous aurons

$$y_1 = z_1^{\lambda_1}\varphi_1(z_1), \quad y_2 = z_1^{\mu_1}\psi_1(z_1) \quad \text{à l'intérieur de } F_1$$

et

$$y_3 = z_2^{\lambda_2}\varphi_2(z_2), \quad y_4 = z_2^{\mu_2}\psi_2(z_2) \quad \text{à l'intérieur de } F_2.$$

» Soient alors x_0 un point de la partie commune à F_1 et à F_2, z_1^0 et z_2^0 les valeurs correspondantes de z_1 et de z_2; il est clair que les coefficients α, β, γ, δ s'exprimeront en séries ordonnées suivant les puissances des A, des B, de z_1^0 et de z_2^0.

» 4. Supposons maintenant que l'on envisage une équation de la forme suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha y \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction uniforme de x devenant infinie pour $a = 0$, de telle sorte que le point $x = 0$ soit un point singulier dans le voisinage duquel les intégrales soient irrégulières. On peut chercher les racines de l'équation déterminante qui correspond à une rotation du point x autour du point singulier $x = 0$. On voit alors, en appliquant les principes exposés plus haut, que ces racines sont des fonctions entières de α.

» 5. De même envisageons des équations de la forme suivante :

$$\frac{dx_k}{dt} = \alpha\sum_{i}^{n}{}_{1}\,\varphi_{ik}x_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les φ_{ik} sont des fonctions périodiques de t développables suivant les sinus et les cosinus des multiples de λt. Cherchons l'équation déterminante D de la substitution que subissent les intégrales quand t s'accroît d'une période. Nous verrions aisément que les racines de cette équation sont des fonctions entières de α.

» 6. Un problème analogue se présente en Mécanique céleste lorsqu'on étudie les variations séculaires des excentricités; seulement les fonctions φ_{ik} sont développées suivant les cosinus et les sinus des arcs $(m\lambda + n\mu)t$, m et n étant des entiers et λ et μ des constantes données. On peut traiter directement ce problème comme le précédent, ou plutôt le ramener au précédent en supposant les moyens mouvements commensurables, ce qu'on peut faire avec une erreur aussi petite qu'on le veut. Les périodes des variations séculaires dépendent alors des racines de l'équation déterminante D définie plus haut, et sont développables suivant les puissances croissantes de α, quel que soit le module de α. Lorsqu'on calcule ces périodes comme on le fait d'ordinaire, c'est-à-dire en supprimant dans les fonctions φ_{ik} tous les termes non séculaires, on ne trouve que le premier terme de ces séries, le terme qui contient α à la première puissance. Le terme suivant, qui est de l'ordre de α^2, est d'ailleurs très petit, à cause de la petitesse de α. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques intégrales doubles.* Note de M. E. **Goursat**, présentée par M. Hermite.

« Dans une Lettre adressée à M. Mittag-Leffler, publiée par le *Journal de Borchardt*, t. 91, M. Hermite a annoncé que l'étude des intégrales doubles, telles que

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{u_0}^{u_1} du \frac{F(u, t, z)}{G(u, t, z)},$$

conduirait sans doute à des particularités intéressantes. M'étant proposé cette étude, j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie les résultats que j'ai obtenus. L'espace E défini par la condition $G(u, t, z) = 0$, quand on fait varier t et u entre les limites de l'intégration, n'est pas pour la fonction $\Phi(z)$ un *espace lacunaire*, au sens que l'on attribue à ce mot depuis les travaux de M. Weierstrass. Considérons un point z en dehors de cet espace et très voisin de la limite; si l'on développe $\Phi(z)$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - z_0$, le cercle de convergence de cette série pénètre à l'intérieur de l'espace E. Prenons ensuite un point z dans la partie commune; on pourra, dans le voisinage de ce point, développer la fonction suivant les puissances croissantes de $z - z_1$, et le cercle de convergence de cette nouvelle série atteindra de nouveaux points de l'espace E. En continuant ainsi, on pourra atteindre tous les points de