Sur les fonctions à espaces lacunaires

par

H. POINCARÉ.

M. WEIERSTRASS dans un mémoire intitulé *Zur Funktionenlehre* et inséré dans les *Berliner Monatsberichte* a appelé l'attention des géomètres sur certaines fonctions présentant des singularités spéciales. Au lieu de présenter un nombre fini ou infini de points singuliers essentiels *isolés* elles offrent des lignes singulières essentielles ou même des *espaces lacunaires* à l'intérieur desquels elles cessent d'exister. Dans une lettre à M. MITTAG-LEFFLER, insérée dans les *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ* M. HERMITE a retrouvé les mêmes résultats par une voie toute différente. D'après les conseils de M. HERMITE j'ai entrepris de rechercher de nouveaux exemples de la particularité signalée par les deux savants géomètres.

Il y a une infinité de manières de définir une fonction, et si on ne s'imposait a priori aucune condition, rien ne serait plus facile que de concevoir une transcendante présentant un espace lacunaire quelconque; on pourrait imaginer par exemple une fonction définie de la manière suivante; elle devrait être égale à 1 à l'extérieur d'un certain cercle, et cesser d'exister à l'intérieur de ce cercle. Ce cercle serait alors un *espace lacunaire*. Si donc on donnait au mot, *fonctions à espaces lacunaires* le sens étendu qu'il semble comporter d'abord, on pourrait en imaginer arbitrairement une infinité. Il est donc nécessaire de préciser ce qu'on doit entendre par cette expression; *fonctions à espaces lacunaires*. C'est ce qui est facile, grâce à une conception nouvelle des fonctions analytiques qui a son origine dans les travaux de CAUCHY et que M. WEIERSTRASS a si clairement exposée dans son mémoire *Zur Functionenlehre* (Monatsberichte Août 1880, page 12).

Considérons une série développée suivant les puissances croissantes de $x - x_0$. Elle sera convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_0 ayant pour centre x_0 et pour rayon R. Si on ne s'occupait que du développement lui-même, on pourrait considérer la fonction définie par la série comme cessant d'exister à l'extérieur du cercle de convergence, et toute la région du plan extérieure

à ce cercle comme formant un espace lacunaire. Ainsi comprise, la fonction à espaces lacunaires ne serait pas une notion analytique nouvelle. Mais il est un moyen bien connu d'étendre au-delà du cercle de convergence le domaine où la fonction envisagée existe. Si l'on considère un point x_1 intérieur au cercle de convergence, on pourra par la formule de Taylor développer la fonction en série ordonnée suivant les puissances de $x - x_1$ et convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_1. A l'intérieur de C_1, on prendra un point x_2 et on développera la fonction en série ordonnée suivant les puissances de $x - x_2$ et convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_2. La fonction se trouvera alors définie non seulement à l'intérieur du premier cercle de convergence, mais à l'intérieur de C_1, de C_2, etc.

Pour la plupart des fonctions qui ont été jusqu'ici l'objet des travaux des géomètres, les cercles tels que C_1, C_2, etc., recouvrent tout le plan, soit une fois, soit plusieurs fois, soit une infinité de fois, en laissant seulement de côté certains points isolés, appelés points singuliers. La fonction existe partout, sauf en des points isolés. *Il n'y a pas d'espace lacunaire.*

Mais il n'en est pas toujours ainsi; il peut arriver que les cercles C_1, C_2, etc., laissent de côté non des points isolés, mais toute une ligne, ou même toute une région du plan. M. WEIERSTRASS a le premier mis cette vérité en lumière, et après lui M. HERMITE a défini à l'aide d'intégrales multiples définies des transcendantes qui n'ont d'existence que dans un domaine limité.

On pourrait citer un grand nombre d'autres exemples de ce fait analytique. Ainsi l'on sait que les fonctions définies par les séries:

$$1 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2^2} x^{3^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} x^{3^n} + \ldots$$

et

$$x \varphi(1) + x^2 \varphi(2) + \ldots + x^n \varphi(n) + \ldots$$

(où $\varphi(n)$ représente la somme des puissances p^{es} des diviseurs de n) n'existent qu'à l'intérieur du cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Il en est de même de certaines fonctions que j'ai définies dans une note insérée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (séances les 14 et 21 Février 1881) et que j'ai appelées fonctions fuchsiennes.

Les exemples que je veux étudier spécialement dans la présente note présenteront les particularités suivantes. Le plan sera divisé en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure à un certain contour C *convexe*. A l'extérieur du contour la fonction envisagée sera holomorphe et uniforme (et par conséquent finie, continue, monodrome et monogène). A l'intérieur du contour elle cessera d'exister. La région intérieure à C sera un espace lacunaire.

Si x_0 est un point quelconque extérieure à C la fonction sera développable suivant les puissances de $x - x_0$; le cercle de convergence sera tangent extérieurement à C. Réciproquement si (x_0 étant un point quelconque extérieur à C) une fonction est développable suivant les puissances de $x - x_0$, de telle sorte que le cercle de convergence soit tangent extérieurement à C, il est clair que cette fonction offrira un espace lacunaire qui sera la région intérieure au contour C.

Voici maintenant comment je définirai une transcendante jouissant de ces propriétés. Envisageons la série suivante:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{x - b_n} = \varphi(x)$$

Je suppose:

1° que la série:

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \text{mod } A_n$$

soit convergente

2° que tous les points b_n soient intérieurs à C ou sur le contour C lui-même.

3° que si l'on prend sur le contour C un arc quelconque et aussi petit que l'on voudra, il y ait toujours une infinité de points b_n sur cet arc.

Je pose:

$$R_p = \sum_{n=p}^{n=\infty} \text{mod } A_n. \qquad\qquad S = \sum_{n=0}^{n=\infty} \text{mod } A_n.$$

La série (2) étant convergente, on pourra prendre p assez grand pour que R_p soit aussi petit que l'on veut.

Je dis d'abord que si x_0 est extérieur à C, la fonction $\varphi(x)$ définie par la série (1) peut se développer en série suivant les puissances de $x - x_0$, et que cette série est convergente à l'intérieur du cercle qui a pour centre x_0 et qui est tangent extérieurement à C. Si en effet R est le rayon de ce cercle, on aura pour tous les points b_n

$$\text{mod } (b_n - x_0) > R. \qquad \text{Posons} \qquad \text{mod } (x - x_0) = \Theta . R$$

Supposons que x soit intérieur au cercle qui a pour centre x_0 et pour rayon R, on aura: $\Theta < 1$.

On aura évidemment:

$$-\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\sum_{q=0}^{q=\infty} \left(A_n \frac{(x - x_0)^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \right) \right]$$

Il est clair:

1° que la série à termes positifs et à double entrée

$$(3) \quad \sum_{n=0,\ q=0}^{n=\infty,\ q=\infty} \frac{\operatorname{mod} A_n\ \Theta^{q+1}}{\operatorname{mod}(x-x_0)}$$

est convergente.

2° que

$$\operatorname{mod}\left[A_n \frac{(x-x_0)^q}{(b_n-x_0)^{q+1}}\right] < \frac{\operatorname{mod} A_n\ \Theta^{q+1}}{\operatorname{mod}(x-x_0)}$$

Il en résulte que les séries à double entrée:

$$(4) \quad \sum_{n=0,\ q=0}^{n=\infty,\ q=\infty} \operatorname{mod}\left[A_n \frac{(x-x_0)^q}{(b_n-x_0)^{q+1}}\right]$$

et

$$(5) \quad \sum_{n=0,\ q=0}^{n=\infty,\ q=\infty} A_n \frac{(x-x_0)^q}{(b_n-x_0)^{q+1}}$$

sont convergentes et que leur somme est indépendante de l'ordre des termes.

La somme de la série (5) sera donc $-\varphi(x)$ quel que soit l'ordre des termes. On aura donc:

$$(6) \quad -\varphi(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} B_q\ (x-x_0)^q$$

en posant:

$$B_q = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\ (b_n-x_0)^{-(q+1)}$$

J'ai donc démontré à la fois:

1° que si x est extérieur à C la série (2) est convergente et la fonction $\varphi(x)$ qu'elle définit est holomorphe et uniforme.

2° que si x est intérieur au cercle qui a pour centre x_0 et pour rayon R et qui est tangent extérieurement à C, la série (6) est convergente.

Je dis maintenant que la série (6) est divergente si x est sur ce cercle ou extérieur à ce cercle et pour le démontrer, je suppose d'abord que x_0 soit sur la normale élevée à C en un des points b_n, au point b_k par exemple.

Je me propose de faire voir que le terme

$$B_q\ R^q$$

ne tend pas vers 0 quand q tend vers l'infini; je vais montrer en effet que l'on peut prendre q assez grand pour que·

$$\text{mod } R^q \left[B_q - A_k \ (b_k - x_0)^{-(q+1)}\right] < \varepsilon.$$

quelque petit que soit ε.

Soit p un nombre entier assez grand pour que:

$$R_p < \frac{\varepsilon}{2} R.$$

Supposons en même temps

$$p > k.$$

Décrivons du point x_0 comme centre un cercle de rayon R' plus grand que R, mais assez petit pour que tous les points:

$$b_0, \ b_1, \ b_2, \ \ldots \ b_{k-2}, \ b_{k-1}, \ b_{k+1}, \ b_{k+2}, \ \ldots \ b_p$$

soient extérieurs à ce cercle. On aura:

$$\frac{R}{R'} < 1.$$

Soit maintenant q un nombre entier assez grand pour que:

$$\frac{S}{R'} \left(\frac{R}{R'}\right)^q < \frac{\varepsilon}{2}$$

On aura:

$$B_q - A_k \ (b_k - x_0)^{-(q+1)} = \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}}$$

On aura:

$$\text{mod } R^q \left(B_q - A_k \ (b_k - x_0)^{-(q+1)}\right) < \text{mod} \left[\sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}}\right]$$

$$+ \text{mod} \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}}$$

$$< \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{\text{mod } A_n}{R'} \left(\frac{R}{R'}\right)^q + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{\text{mod } A_n}{R'} \left(\frac{R}{R'}\right)^q + \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{\text{mod } A_n}{R} < \frac{S}{R'} \left(\frac{R}{R'}\right)^q + \frac{R_p}{R} < \varepsilon$$

On a donc:

$$\lim R^q \left(B_q - A_k \ (b_k - x_0)^{-q+1}\right) = 0.$$

Or:

$$\text{mod } R^q A_k \ (b_k - x_0)^{-q+1}) = \frac{\text{mod } A_k}{R}$$

Il est donc impossible que $R^q A_k \ (b_k - x_0)^{-q+1}$ et par conséquent que $R^q B_q$ tende vers 0.

Supposons maintenant que x_0 ne soit pas sur la normale élevée à C en l'un des points b_n; je dis que la série (6) est encore divergente quand:

$$\text{mod } (x - x_0) > R.$$

En effet supposons que cela ne soit pas vrai et que le cercle de convergence ait un rayon R' plus grand que R. Ce cercle de convergence découperait sur le contour C un certain arc sur lequel, par hypothèse, il devrait y avoir une infinité de points b_n. Soit b_k l'un de ces points. Elevons en ce point une normale à C et prenons sur cette normale un point x_1 assez voisin de b_k pour que le cercle K qui passe par b_k et qui a x_1 pour centre soit tout entier intérieur au cercle qui a pour rayon R' et pour centre x_0; cela est évidemment toujours possible. La fonction $\varphi(x)$ pourrait alors se développer en série suivant les puissances de $x - x_1$ et cette série devrait être convergente, non seulement à l'intérieur du cercle K, mais sur la circonférence de ce cercle, ce qui est contraire à ce que je viens de démontrer.

Il est donc démontré que le cercle de convergence de la série (6) est toujours tangent extérieurement à C.

Donc la fonction $\varphi(x)$ est holomorphe et uniforme à l'extérieur de C et présente un espace lacunaire à l'intérieur de ce contour.

Je vais maintenant citer quelques exemples de séries satisfaisant aux conditions imposées à la série (1).

Soit d'abord:

$$(7) \qquad \varphi(x) = \sum \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \cdots u_p^{m_p}}{x - \dfrac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \cdots + m_p \alpha_p}{m_1 + m_2 + \cdots + m_p}}$$

Je suppose:

1° que $u_1, u_2, \ldots u_p$ sont des quantités données de module plus petit que 1.

2° que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ sont des constantes quelconques.

3° que $m_1, m_2, \ldots m_p$ prennent sous le signe Σ tous les systèmes de valeurs entières positives.

J'envisage le polygone P défini par les conditions suivantes:

1° Il est convexe.

2° Tous ses sommets font partie du système des points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$.

3° Tous les points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ qui ne sont pas des sommets du polygône P sont sur le périmètre de ce polygône ou à son intérieur.

Il est clair que:

1° La série

$$\sum \text{mod}\left(u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots\ldots u_p^{m_p}\right)$$

est convergente.

2° Tous les points

$$\frac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots\ldots + m_p \alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_p}$$

sont sur le périmètre de P ou bien à l'intérieur de ce polygône.

3° Sur tout segment, si petit qu'il soit, de l'un des côtés de P, il y a une infinité de points:

$$\frac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots\ldots + m_p \alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_p}$$

Soit en effet $\alpha_1 \alpha_2$ le côté du polygône considéré, il est clair qu'on pourra choisir les entiers positifs m_1 et m_2 (et cela d'une infinité de manières) de telle sorte que le point

$$\frac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2}{m_1 + m_2}$$

soit situé sur un segment donné du côté $\alpha_1 \alpha_2$.

Il en résulte que la fonction $\varphi(x)$ est holomorphe et uniforme à l'extérieur de P et présente un espace lacunaire à l'intérieur de ce polygône.

Dans le cas où $p = 3$, l'espace lacunaire se réduit au triangle $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$.

Dans le cas où $p = 2$, l'espace lacunaire se réduit à une ligne singulière essentielle qui est le segment de droite $\alpha_1 \alpha_2$.

Comme second exemple je citerai la fonction dont voici l'origine.

Soit l'équation aux différences partielles:

$$(8) \quad u_1 F_1 \frac{dz}{du_1} + u_2 F_2 \frac{dz}{du_2} + \ldots + u_n F_n \frac{dz}{du_n} = z.$$

$F_1, F_2, \ldots\ldots F_n$ sont des fonctions des n variables $u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$ et du paramètre x, holomorphes pour toutes les valeurs de x et lorsque les modules de $u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$ sont suffisamment petits. Elles se réduisent respectivement à

$$1, \; x - \alpha_2, \; \ldots\ldots\ldots \; x - \alpha_n$$

quand on y annule tous les u.

Dans une thèse que j'ai soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 1er Août 1879, j'ai démontré que si le point x est extérieur au polygône convexe P circonscrit aux n points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$, il existe une série S ordonnée suivant les puissances des u, convergente et satisfaisant à l'équation

(8) pourvu que les modules de ces variables soient assez petits. Les coëfficients de cette série sont des fonctions rationnelles de x; si on donne aux u des valeurs de module suffisamment petit et qu'on les considère comme des constantes, la somme de la série est une fonction de x, et l'on peut voir qu'elle est analogue à la fonction $\varphi(x)$ définie par la série (1) et qu'elle présente comme elle un espace lacunaire. Le polygône P est compris tout entier dans cet espace lacunaire.