Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent par des Substitutions Linéaires.

Par

H. Poincaré à Paris.

1. Les fonctions que je veux étudier dans ce travail ont les plus grandes analogies avec les fonctions elliptiques et modulaires qui n'en sont que des cas particuliers. On sait quels services les transcendantes à deux périodes ont rendus à l'analyse; et on comprend que tous les géomètres ont dû avoir l'idée qu'il y avait lieu de les généraliser. Les fonctions elliptiques ont pour propriété essentielle de se reproduire quand on augmente leur argument ζ de l'une des périodes. Le plan se trouve partagé en une infinité de parallélogrammes qui forment une sorte de damier dont l'ensemble ne varie pas, mais dont les cases se permutent quand on augmente ζ de l'une des périodes.

Nous allons rechercher s'il existe une fonction uniforme $F(\zeta)$ qui ne change pas quand on applique à ζ l'une des substitutions linéaires en nombre infini:

$$S_i = \left(\zeta, \frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right).$$

Je suppose que l'indice i prend toutes les valeurs 0, 1, 2, $\cdots$ ad inf. et que l'on a:

$$\alpha_0 = \delta_0 = 1, \quad \gamma_0 = \beta_0 = 0, \quad \alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1.$$

En d'autres termes je cherche, s'il y a une fonction uniforme $F(\zeta)$ jouissant de la propriété:

$$F(\zeta) = F\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right).$$

Il est clair que les substitutions S_i devront former un groupe et un groupe discontinu, c'est à dire que la portion du plan où la fonction F existe, peut être divisée en une infinité de régions $R_0, R_1, \cdots, R_i, \cdots$ telles que quand ζ parcourt R_0, $\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}$ parcourt R_i. Ces diverses régions formeront comme dans le cas des fonctions elliptiques une sorte de damier dont l'ensemble ne variera pas, mais dont les cases se permuteront, quand on appliquera à ζ l'une des substitutions S_i. A chacune des substitutions S_i correspond de la sorte une des régions R_i.

Si l'on appelle *points correspondants* les divers points $\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}$, la fonction F reprendra la même valeur en deux points correspondants et il y aura dans chacune des régions R_i un point correspondant à un point donné et un seul. Deux régions R seront dites *limitrophes* quand elles seront contigües tout le long d'un arc de leur périmètre. Les substitutions qui correspondent aux régions limitrophes de R_0 seront des *substitutions fondamentales* dont toutes les substitutions S_i seront des combinaisons. Il en résulte que le groupe sera complètement déterminé quand on connaîtra ces substitutions fondamentales et par conséquent quand on connaîtra le polygone R_0 et les polygones limitrophes.

2. Je vais chercher d'abord à former tous les groupes discontinus formés de substitutions S_i où les coëfficients α_i, β_i, γ_i, δ_i sont réels.

Je les appelle groupes Fuchsiens. Dans ce cas, il est aisé de voir que les régions R_i qui forment le *damier* peuvent être réduites à des polygones curvilignes situés tout entiers au-dessus de l'axe des quantités réelles (que j'appelle pour abréger X) et ayant des côtés de deux sortes; ceux de la 1ère sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X, ceux de la 2e sorte sont des segments de l'axe X lui-même.

Chacune des substitutions fondamentales du groupe changera le polygone R_0 en un polygone limitrophe R_1, et par conséquent l'un des côtés de la 1ère sorte ab de R_0 en un autre côté cd de ce même polygone. Cela montre que les côtés de la 1ère sorte sont en nombre pair et se répartissent en paires de côtés conjugués (ab, cd). Si a', b', c', d' sont les quantités imaginaires conjuguées de a, b, c, d, on devra avoir:

$$\frac{a-a'}{a-b'}\,\frac{b-b'}{b-a'} = \frac{c-c'}{c-d'}\,\frac{d-d'}{d-c'}. \tag{1}$$

Cette condition est suffisante pour qu'il existe une substitution S_i à coëfficients réels, qui change ab en cd; cette substitution est d'ailleurs parfaitement déterminée. Il resulte de là que si l'on se donne le polygone R_0 et la distribution de ses côtés en paires, les substitutions fondamentales, et par conséquent le groupe lui-même seront parfaitement déterminés.

Nous avons vu qu'on ne pouvait avoir deux points correspondants à l'intérieur de R_0; les points du périmètre, au contraire, se correspondent deux à deux, de manière qu'un côté corresponde à son conjugué. De plus deux ou un plus grand nombre de sommets pourront être des points correspondants. Je dirai alors qu'ils appartiennent à un même cycle.

Voici une règle pratique pour former les cycles; on partira d'un sommet quelconque, on considérera le côté suivant (en parcourant le périmètre de R_0 dans un sens convenu), si ce côté est de la 1ère sorte, puis le côté conjugué, puis le sommet suivant, puis le côté suivant s'il est de la 1ère sorte, puis son conjugué, etc.; on ne sera arrêté que si l'on arrive à un côté de la 2e sorte, auquel cas le cycle sera *ouvert*, ou si l'on retombe sur le sommet qui a servi de point de départ, auquel cas le cycle sera *fermé*. Tous les sommets rencontrés de la sorte formeront un cycle.

Un cycle fermé sera de la 1ère catégorie si tous ses sommets sont au-dessus de X et de la 2e dans le cas contraire.

Nous avons vu que pour déterminer un groupe Fuchsien il suffit de connaître R_0 et la distribution de ses côtés en paires. On connait en effet les substitutions fondamentales, et on peut construire les polygones limitrophes de R_0, puis les polygones limitrophes de ceux-ci, et ainsi de suite. Pour que le groupe Fuchsien existe, il faut et il suffit que les polygones obtenus de la sorte recouvrent toute une partie du plan et ne la recouvrent qu'une fois, de manière à former un damier.

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi? Je les ai déterminées par des procédés empruntés à la géométrie non-euclidienne; j'ai montré qu'outre la condition (1), le polygone R_0 est assujetti à la condition suivante:

La somme des angles qui correspondent aux divers sommets d'un cycle de la 1ère catégorie doit être une partie aliquote de 2π.

3. Pour former tous les groupes Fuchsiens, il suffira donc de former tous les polygones R_0 qui satisfont à ces deux conditions. En voici quelques exemples.

1er cas. Je suppose que R_0 soit un polygone de $2n$ côtés de la 1ère sorte dont les sommets se succèdent dans l'ordre suivant: $A_1, A_2, \cdots, A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \cdots, B_2, A_1$; les côtés A_1A_2, B_1B_2; A_2A_3, B_2B_3; $\cdots$; A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1}; $\cdots$; A_nA_{n+1}, B_nA_{n+1}; seront conjugués, il y aura alors $n+1$ cycles formés respectivement des sommets:

$$A_1;\ A_2, B_2;\ A_3, B_3;\ A_4, B_4;\ \cdots;\ A_n, B_n;\ A_{n+1}.$$

Le polygone R_0 satisfera à la condition (1) et de plus les angles A_1, $A_2 + B_2$, $A_3 + B_3$, $\cdots$, $A_n + B_n$, A_{n+1} seront des parties aliquotes de 2π.

Si je suppose de plus que le polygone est symétrique par rapport à A_1A_{n+1} et que cette droite est perpendiculaire à X, R_0 se trouvera divisé en deux polygones $R_0' = A_1 A_2 \cdots A_{n+1}$, et $R_0'' = A_1 B_2 B_3 \cdots B_n A_{n+1}$ dont tous les angles seront des parties aliquotes de π. Chacun des polygones R_i du damier se trouvera de même divisé en deux polygones R_i' et R_i''. Le damier sera ainsi formé d'une infinité de polygones R_i', R_i'' et de telle sorte que deux polygones limitrophes soient dérivés l'un de l'autre par une transformation par *rayons vecteurs réciproques* qui n'altère pas leur frontière commune. Si on suppose en particulier $n = 2$, on retombera sur le cas examiné par M. Schwarz au tome 75 du Journal de Crelle.

2[d] cas. Je suppose que les sommets du polygone R_0 soient au nombre de $2n$ et que les côtés opposés soient conjugués. Si n est pair, tous les sommets appartiennent au même cycle et la somme des angles doit être une partie aliquote de 2π. Si n est impair, il y a deux cycles formés, l'un de tous les sommets de rang impair, l'autre de tous les sommets de rang pair. La somme de tous les angles de rang pair, comme celle de tous les angles de rang impair devront diviser 2π.

3[e] cas. R_0 a 8 sommets $ABCDEFGH$; les côtés BC, DE, FG, HA sont de la 2[e] sorte; les côtés AB et CD, EF et GH sont conjugués; tous les cycles sont *ouverts;* un pareil polygone n'est assujetti à *aucune* condition.

4[e] cas. L'un des cas particuliers les plus remarquables est celui où les coëfficients des S_i sont entiers, et qui a fait l'objet des savantes recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

4. J'ai supposé jusqu'ici que les coëfficients des S_i étaient réels; il est facile de faire une première généralisation. Posons:

$$t = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \qquad t_i = \frac{a\left[\dfrac{\alpha_i\xi + \beta_i}{\gamma_i\xi + \delta_i}\right] + b}{c\left[\dfrac{\alpha_i\xi + \beta_i}{\gamma_i\xi + \delta_i}\right] + d},$$

a, b, c, d étant quatre constantes imaginaires telles que:

$$ad - bc = 1.$$

A la substitution S_i correspond la substitution linéaire:

$$T_i = (t, t_i)$$

dont les coëfficients sont imaginaires. Mais de même que les substitutions S_i conservent X et changent également en lui-même le demi-plan qui est au-dessus de cet axe; de même les substitutions T_i conserveront un certain cercle qui a pour équation:

$$\text{partie imaginaire de } \frac{dt - c}{bt - a} = 0$$

et que j'appellerai *cercle fondamental.* De plus si les substitutions S_i

forment un groupe discontinu, il en sera de même des substitutions T_i; à chacune d'elles correspondra, comme dans le cas précédent, une case d'un certain damier formé par des polygones R dont les côtés de la 1ère sorte sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental et ceux de la 2e sorte sont des arcs du cercle fondamental. Mais la surface totale de ce damier sera finie (contrairement à ce qui avait lieu dans le cas précédent) car elle ne recouvrira que l'intérieur du cercle fondamental ou une partie seulement de ce cercle. Nous conserverons le nom de Fuchsiens à ces groupes dont les groupes à substitutions réelles ne sont que des cas particuliers.

Reste à examiner le cas le plus général, celui où l'on ne fait aucune hypothèse sur les substitutions S_i. Dans ce cas il y a encore des groupes discontinus que j'ai appelés Kleinéens et dont j'ai démontré l'existence et étudié le mode de génération par des procédés empruntés à la géométrie non-euclidienne à trois dimensions. Dans certains cas particuliers des méthodes plus simples peuvent être employées, mais dans le cas le plus général les conditions aux quelles sont assujettis les groupes Kleinéens sont très compliquées et ne peuvent être énoncées ici. Nous aurons encore un damier dont les cases, en nombre infini, seront des polygones limités par des arcs de cercle, et dont la surface totale sera en général finie.

5. De l'existence des groupes discontinus, on pourrait sans doute par des procédés analogues à ceux de M. Schwarz déduire celle de fonctions uniformes reproduites par les substitutions de ce groupe; mais on n'aurait pas ainsi l'expression explicite de ces transcendantes. Aussi est-il préférable d'employer d'autres méthodes. Mon point de départ est ce fait que la série

$$\sum_i \text{mod.}\ \frac{1}{(\gamma_i \xi + \delta_i)^{2m}}$$

(où m est un entier plus grand que 1) est convergente. Je m'appuie sur ce que l'aire totale du damier est finie: Dans les cas particuliers où cela ne serait pas, un changement linéaire convenablement choisi de la variable nous ramènerait au cas général. La série:

$$\Theta(\xi) = \sum \mathsf{H}\left(\frac{\alpha_i\xi + \beta_i}{\gamma_i\xi + \delta_i}\right)\frac{1}{(\gamma_i\xi + \delta_i)^{2m}}$$

où $\mathsf{H}(\xi)$ est une fonction rationnelle quelconque, est convergente et définit une fonction uniforme de ξ.

Cette fonction jouit de la propriété:

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i\xi + \beta_i}{\gamma_i\xi + \delta_i}\right) = \Theta(\xi)\ (\gamma_i\xi + \delta_i)^{2m}.$$

De plus le nombre des zéros et des infinis de cette fonction intérieurs à R_0 est toujours fini, ce que j'établis par la considération de l'intégrale:

$$\int \frac{\Theta'(\zeta)\,d\zeta}{\Theta(\zeta)}$$

si aucun des angles de R_0 n'est nul, et par un raisonnement plus compliqué dans le cas contraire. $\Theta(\zeta)$ s'appellera une fonction thétafuchsienne ou thétakleinéenne selon que le groupe correspondant sera Fuchsien ou Kleinéen.

Soit $F(\zeta)$ le quotient de deux fonctions telles que $\Theta(\zeta)$ correspondant à une même valeur de m. Il est clair, qu'à l'intérieur de R_0, cette fonction n'aura qu'un nombre fini de zéros et d'infinis et qu'elle jouira de la propriété:

$$F\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right) = F(\zeta).$$

Nous appellerons fonction Fuchsienne (ou Kleinéenne) toute fonction jouisant de ces deux propriétés.

Occupons-nous d'abord des fonctions Fuchsiennes. Si le polygone R_0 n'admet pas de cycle ouvert les fonctions Θ et F n'existeront qu'à l'intérieur du cercle fondamental dont la circonférence est pour elles une ligne singulière essentielle. Dans certains cas particuliers même, les transcendantes n'existent pas dans tout le cercle fondamental, mais seulement dans un domaine limité par une infinité de circonférences coupant orthogonalement le cercle fondamental. Si au contraire R_0 admet des cycles ouverts, les fonctions Θ et F existent dans tout le plan et leurs points singuliers sont isolés, quoique en nombre infini.

Supposons de nouveau que R_0 n'admette pas de cycle ouvert. Si $H(\zeta)$ a des infinis intérieurs au cercle fondamental, la fonction Θ aura des infinis et on sera certain qu'elle n'est pas identiquement nulle. Mais si $H(\zeta)$ ne devient pas infini à l'intérieur du cercle fondamental, la fonction Θ sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle, et pourra même être identiquement nulle. Et en effet on voit aisément que toutes les fonctions Θ *sans infini* peuvent (*pour une même valeur de m*) s'exprimer linéairement par un nombre fini d'entre elles. Ces relations linéaires, dont l'existence se démontre aisément a priori, peuvent être *effectivement* écrites, grâce à la considération de fonction auxiliaires de la forme:

$$\sum \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}\right)}{\zeta-\dfrac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}}\,\frac{1}{(\gamma_i a+\delta_i)^{2m}}. \tag{2}$$

C'est de la même manière qu'on arrive à exprimer une fonction Fuchsienne donnée à l'aide de séries telles que Θ et cela d'une infinité de manières; mais je ne puis insister davantage sur ce point, cela m'entrainerait trop loin.

Passons maintenant aux fonctions Kleinéennes. Les unes existeront dans tout le plan et auront des points singuliers isolés; les autres n'existeront que dans un certain domaine. La limite de ce domaine n'est pas une courbe analytique; la tangente en un de ses points est généralement déterminée, mais il n'en est pas de même du rayon de courbure.

6. Entre deux fonctions Fuchsiennes (ou Kleinéennes) F et F_1 correspondant à un même groupe, il y a toujours une relation algébrique; car à une valeur de F correspondent un nombre fini de valeurs de F_1 et réciproquement. Toutes les fonctions qui correspondent à un même groupe s'exprimeront donc rationnellement en fonctions de deux d'entre elles que j'appelle x et y et entre lesquelles il y a une relation algébrique

$$f(x, y) = 0. \tag{3}$$

Quel est le genre de cette relation? La géométrie de situation permet aisément de le déterminer. Soit $2n$ le nombre des côtés de la 1ère sorte, p celui des cycles fermés. Le genre sera: $\frac{n+1-p}{2}$ s'il n'y a pas de cycle ouvert et $n-p$ s'il y en a. Reprenons les exemples que nous avons envisagés plus haut. Dans le 1er cas le genre est nul; dans le 2e il est $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ selon que n est pair ou impair; dans le 3e il est égal à 2.

7. Nous allons voir maintenant comment les fonctions x et y définies plus haut permettent d'intégrer certaines équations linéaires du 2d ordre. Soit:

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\xi}}, \quad v_2 = \xi \sqrt{\frac{dx}{d\xi}}$$

la fonction v_1 et v_2 seront des intégrales d'une équation linéaire du 2e ordre de la forme:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\, \varphi(x, y), \tag{4}$$

φ étant rationnel en x et en y; et y étant lié à x par la relation algébrique (3). Ici x est une fonction Fuchsienne ou Kleinéenne du rapport ξ des intégrales. *Il existe donc des équations linéaires de la forme* (4) *telles que la variable indépendante soit une fonction uniforme du rapport des intégrales.*

Il s'agit maintenant, étant donnée une équation de la forme (4), de reconnaître si x est fonction Fuchsienne ou fonction Kleinéenne ou encore, fonction non uniforme du rapport des intégrales et dans les deux premiers cas, d'exprimer x à l'aide des séries Θ. Le second problème peut se résoudre à l'aide des considérations dont j'ai parlé plus haut et qui permettent d'exprimer toute fonction Fuchsienne par les séries Θ. Disons quelques mots du premier problème.

Les conditions auxquelles sont assujetties les coëfficients de l'équation (4) pour que x soit fonction uniforme du rapport des intégrales sont très-compliquées; voici quelle est la forme la plus simple sous laquelle on pourra les présenter; on pourra exprimer les coëfficients de l'équation (4) en fonctions transcendantes, mais *uniformes* d'un nombre égal de paramètres auxiliaires convenablement choisis. Les conditions cherchées se réduiront alors à un certain nombre d'inégalités ou d'égalités *algébriques* entre les parties réelles et imaginaires de ces nouveaux paramètres. Je ne puis ici entrer dans plus de détails.

8. J'ajouterai cependant quelques mots en ce qui concerne le cas le plus simple, celui où l'équation (4) est de la forme:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v \cdot \frac{P_n}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdots (x-l)^\lambda}$$

P_n étant un polynôme de degré n en x.

Supposons d'abord:

(5) $\alpha \leq 2,\ \beta \leq 2, \cdots, \lambda \leq 2,\ n \leq \alpha + \beta + \cdots + \lambda - 2.$

C'est le cas où les intégrales sont *régulières*, (suivant l'expression de M. Fuchs) dans le voisinage de chacun des points singuliers $a, b, \cdots, l, \infty$. Pour que x soit une fonction uniforme du rapport des intégrales, il faut d'abord que la différence des racines de chaque équation déterminante soit nulle ou soit une partie aliquote de l'unité. Mais cette condition n'est pas suffisante. Si de plus les coëfficients de P_n satisfont à certaines *inégalités*, x sera fonction *Kleinéenne* du rapport des intégrales, s'ils satisfont en outre à certaines *égalités*, x sera fonction *Fuchsienne* de ce rapport. Donc, si l'on suppose remplie la condition relative aux équations déterminantes, il suffit pour que x soit fonction uniforme du rapport (ζ) des intégrales, que certaines quantités soient comprises entre certaines limites; pour que ce soit une fonction Fuchsienne de ce rapport ζ, il faut en outre que ces quantités prennent certaines valeurs déterminées.

Si x est fonction Fuchsienne de z, cette fonction n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Si nous supposons de plus que les racines de chaque équation déterminante soient égales, nous verrons aisément que x ne peut prendre aucune des valeurs $a, b, \cdots, l, \infty$ quand ζ est intérieur au cercle fondamental.

Supposons maintenant que les inégalités (4) cessent d'avoir lieu, de telle sorte que les intégrales deviennent *irrégulières*. Dans ce cas, x pourra encore être fonction Fuchsienne de ζ, mais cette fonction, au lieu d'exister dans tout le cercle fondamental, n'existera plus que dans un domaine limité par une infinité de circonférences qui coupent orthogonalement ce cercle.

9. Nous avons vu qu'une fonction Fuchsienne peut s'exprimer à l'aide de séries telles que Θ; mais on en peut trouver beaucoup d'autres expressions. Si par exemple x ne peut devenir infini quand ξ est intérieur au cercle fondamental, on pourra exprimer cette fonction par une série toujours convergente et ordonnée suivant les puissances croissantes de $\xi - \xi_0$ (ξ_0 étant le centre du cercle fondamental). Dans le cas contraire on pourra représenter x d'une infinité de manières comme le quotient de deux pareilles séries dont on pourra calculer les coëfficients par récurrence. Enfin nous pourrons encore exprimer une fonction Fuchsienne d'une infinité de manières à l'aide de séries telles que (2).

10. J'ai démontré le théorème suivant:

On peut toujours construire une fonction Fuchsienne $F(\xi)$ n'existant qu'à l'interieur du cercle fondamental et ne pouvant prendre à l'intérieur de ce cercle aucune des $n + 1$ valeurs données:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \infty.$$

Le calcul numérique des constantes qui servent à construire cette fonction est assez long; mais si au lieu de calculer exactement ces constantes, on n'en prend que des valeurs approchées, on aura construit, au lieu de $F(\xi)$, une fonction Kleinéenne jouissant des mêmes propriétés.

Ce théorème a une première conséquence importante. Soit une relation algébrique quelconque:

$$f(x, y) = 0$$

admettant comme points singuliers

$$a_1, a_2, \cdots, a_n.$$

Faisons-y

$$x = F(\xi)$$

$F(\xi)$ étant la fonction définie plus haut; tant que ξ sera à l'intérieur du cercle fondamental, x ne pourra passer par aucun des points singuliers; si ξ sort de ce cercle, x cessera d'exister. Il résulte de là que y est une fonction uniforme de ξ qui n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental et on voit aisément que cette fonction est une fonction Fuchsienne.

Donc les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque peuvent s'exprimer par des fonctions Fuchsiennes d'un même paramètre ξ.

11. Considérons maintenant une équation linéaire quelconque:

$$(6) \qquad \frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3}\frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \cdots + P_1\frac{dv}{dx} + P_0 v = 0\,.$$

Je suppose que les P soient des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées entre elles par une relation algébrique:

(7) $$f(x, y) = 0$$

et qu'on ait fait disparaître le coëfficient de $\frac{d^{n-1} v}{d x^{n-1}}$ ce qui est toujours possible. Soient:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

les points singuliers de l'équation (7) et les infinis des P. Faisons, comme dans le paragraphe précédent:

$$x = F(\zeta).$$

On démontrerait par un raisonnement tout semblable à celui qui précède que les n intégrales de l'équation (6) sont des fonctions $\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta), \cdots, \varphi_n(\zeta)$ uniformes en ζ et n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Ces fonctions, comme $F(\zeta)$ d'ailleurs, peuvent s'exprimer par des séries toujours convergentes ordonnées suivant les puissances de $\zeta - \zeta_0$ et dont les coëfficients se calculent par récurrence.

12. Je dis que n fonctions:

$$\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta), \cdots, \varphi_n(\zeta)$$

sont des fonctions zétafuchsiennes, si elles sont uniformes et si elles jouissent de la propriété:

(8) $$\varphi_\lambda\left(\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right) = \mathsf{A}^i_{1,\lambda}\varphi_1(\zeta) + \mathsf{A}^i_{2,\lambda}\varphi_2(\zeta) + \cdots + \mathsf{A}^i_{n,\lambda}\varphi_n(\zeta).$$

Les A sont des constantes dont le déterminant est l'unité, et les substitutions $\left(\zeta, \frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right)$ sont toutes celles d'un groupe fuchsien G. Les substitutions linéaires

$$y'_\lambda = \mathsf{A}^i_{1,\lambda} y_1 + \mathsf{A}^i_{2,\lambda} y_2 + \cdots + \mathsf{A}^i_{n,\lambda} y_n$$

devront évidemment former un groupe H isomorphe à G.

Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ du paragraphe précédent sont évidemment des fonctions zétafuchsiennes, ce qui me permet d'énoncer le résultat suivant:

Toute équation différentielle linéaire à coëfficients algébriques est intégrable par les fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes.

Mais le procédé indiqué au paragraphe précédent n'est pas unique; au lieu de substituer $F(\zeta)$ à la place de x dans l'équation (6) on aurait pu substituer une infinité d'autres fonctions fuchsiennes et on aurait également obtenu pour les intégrales un système de fonctions zétafuchsiennes. On aurait pu aussi substituer à la place de x une infinité de fonctions Kleinéennes, et les intégrales auraient été des fonctions zétakleinéennes, formées avec un groupe Kleinéen comme les fonctions zétafuchsiennes le sont avec un groupe Fuchsien. Le nombre des integrations de l'équation (6) à l'aide des transcendantes nouvelles est donc infini.

13. Nous ne pourrons dire toutefois que nous avons intégré l'équation (6) que quand nous aurons donné une expression explicite des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$; nous en avons une déjà, il est vrai, sous la forme de séries toujours convergentes et ordonnées suivant les puissances de $\xi - \xi_0$; ou bien encore sous la forme d'un quotient de deux pareilles séries. Mais on peut en donner une expression différente analogue à celle des fonctions Fuchsiennes à l'aide des séries Θ.

Soient (en reprenant les constantes A du paragraphe précédent)

$$a^i_{1,\lambda},\ a^i_{2,\lambda},\ \cdots,\ a^i_{n,\lambda}$$

les mineurs du déterminant des A^i.

Cela posé, je considère les groupes G et H comme données, et j'envisage n fonctions rationnelles de ξ, $H_1(\xi), H_2(\xi), \cdots, H_n(\xi)$. Je forme les n séries

$$(9)\quad \Phi_\lambda(\xi) = \sum_i \left[a^i_{\lambda.1} H_1\left(\frac{\alpha_i\xi+\beta_i}{\gamma_i\xi+\delta_i}\right) + a^i_{\lambda.2} H_2\left(\frac{\alpha_i\xi+\beta_i}{\gamma_i\xi+\delta_i}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + a^i_{\lambda.n} H_n\left(\frac{\alpha_i\xi+\beta_i}{\gamma_i\xi+\delta_i}\right)\right](\gamma_i\xi+\delta_i)^{-2m}.$$

Ces séries sont convergentes pourvu que m soit assez grand. Elles jouissent de la propriété:

$$\Phi_\lambda\left(\frac{\alpha_i\xi+\beta_i}{\gamma_i\xi+\delta_i}\right) = [\mathsf{A}^i_{1.\lambda}\Phi_1(\xi) + \mathsf{A}^i_{2.\lambda}\Phi_2(\xi) + \cdots + \mathsf{A}^i_{n.\lambda}\Phi_n(\xi)](\gamma_i\xi+\delta_i)^{2m}.$$

Les n fonctions:

$$\frac{\Phi_\lambda(\xi)}{\Theta(\xi)}$$

où $\Theta(\xi)$ est la série du paragraphe (5), sont des fonctions zétafuchsiennes et si l'on considérait un système quelconque de fonctions zétafuchsiennes, on verrait que ces fonctions peuvent toujours s'exprimer rationnellement par un certain nombre de séries de la forme $\Theta(\xi)$ et de séries de la forme (9).

14. Je n'ai pu donner ici les démonstrations de ces théorèmes, je n'ai pu qu'énoncer des résultats en supprimant tous les raisonnements intermédiaires que je publierai prochainement dans un travail de longue haleine. L'énoncé des résultats eux-mêmes n'a pu être complet, je prie le lecteur de vouloir bien m'excuser.

Je ne parlerai pas ici des applications des fonctions fuchsiennes à l'arithmétique, et au calcul des intégrales abéliennes de 1ère espèce et je me bornerai à résumer en ces quelques lignes les résultats de ce travail:

Si l'on envisage une équation différentielle linéaire à coëfficients algébriques, on peut exprimer la variable indépendante et les intégrales en fonctions uniformes d'un même paramètre ξ.

Ces fonctions uniformes peuvent d'une infinité de manières s'exprimer rationnellement par un certain nombre de séries à coëfficients entiers ou rationnels).*

Paris, 17. Décembre 1881.

---

*) Die vorstehend abgedruckte Arbeit des Herrn Poincaré resumirt gewisse Resultate, welche der Verfasser in einer Reihe aufeinanderfolgender Artikel in den Comptes Rendus dieses Jahres mitgetheilt hat. Es wird kaum nöthig sein, dieselben der Beachtung der Mathematiker noch besonders zu empfehlen. Handelt es sich doch um Functionen, welche geeignet scheinen, in der Lehre von den algebraischen Irrationalitäten den Abel'schen Functionen erfolgreiche Concurrenz zu machen, und die überdies einen ganz neuen Einblick in diejenigen Abhängigkeiten gewähren, welche durch lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coëfficienten bestimmt sind. Indem ich Herrn Poincaré im Namen der Annalenredaction den besonderen Dank dafür ausspreche, dass er uns vorstehenden Aufsatz hat überlassen wollen, glaube ich ihm nur in dem Punkte entgegentreten zu sollen, dass ich die von ihm vorgeschlagene Benennung der in Betracht kommenden Functionen als verfrüht bezeichne. Einmal nämlich bewegen sich alle die Untersuchungen, welche Hr. Schwarz und ich in der betreffenden Richtung bislang veröffentlicht haben, auf dem Gebiete der „fonctions fuchsiennes", über die Hr. Fuchs selbst nirgends publicirt hat. Andererseits habe ich über die allgemeineren Functionen, welche Hr. Poincaré mit meinem Namen in Verbindung bringt, von mir aus bisher nichts drucken lassen; ich habe nur gelegentlich Herrn Poincaré auf die Existenz dieser Functionen aufmerksam gemacht (siehe Comptes Rendus 1881, I, p. 1484). Letzterer Umstand ist aber um so irrelevanter, als sich ein specieller Fall jener allgemeineren Functionen bereits anderwärts bei Gelegenheit in Betracht gezogen findet, nämlich in der Arbeit von Hrn. Schottky im 83ten Bande von Borchardt's Journal. Es werden dort (pag. 346 ff.) Functionen besprochen, welche sich symmetrisch reproduciren, wenn man einen ebenen Bereich, der von lauter getrennten Kreislinien begrenzt ist, an eben diesen Kreislinien spiegelt. Uebrigens möchte ich auch auf die Dyck'schen Arbeiten im 17ten und 18ten Bande dieser Annalen sowie insbesondere auf dessen demnächst (in Bd. XX) erscheinende Habilitationsschrift verweisen, wo Gebietseintheilungen der allgemeinsten hier in Betracht kommen Art zu gruppentheoretischen Zwecken verwandt werden. — Vielleicht ist es gut, diesen kleinen Bemerkungen noch eine allgemeinere zuzugesellen und bei vorliegender Gelegenheit zu constatiren, dass alle die hier in Frage kommenden Untersuchungen, und zwar sowohl diejenigen, welche ein geometrisches Gepräge besitzen, als auch die mehr analytischen, die sich auf die Lösungen linearer Differentialgleichungen beziehen, auf Riemann'sche Ideenbildungen zurückgehen. Der Zusammenhang ist ein so enger, dass man behaupten kann, es handele sich bei Untersuchungen im Sinne des Hrn. Poincaré geradezu um die weitere Durchführung des allgemeinen functionentheoretischen Programm's, welches Riemann in seiner Doctordissertation aufgestellt hat.

Leipzig, den 30. December 1881.

F. Klein.