d'équations aux différentielles totales :

$$dx = P(u, v, w)du + R(u, v, w)dv,$$
$$dy = P_1(u, v, w)du + R_1(u, v, w)dv,$$

où les P et les R sont rationnelles et w est lié à u et à v par la relation algébrique

$$f(u, v, w) = 0.$$

» Le système d'équations aux différentielles totales donnant u et v en fonction de x et y est ainsi complètement déterminé. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions fuchsiennes.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Je voudrais exposer ici quelques résultats nouveaux et les réunir à des théorèmes anciens, de façon à en faire un ensemble comprenant, comme cas particuliers, les résultats obtenus par M. Klein par d'autres considérations, et exposés par lui dans deux Notes récentes (*Math. Ann.*, Bd. XIX et XX).

» Soit une équation différentielle linéaire quelconque

$$(1) \qquad \frac{d^n v}{dx} + P_{n-2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3}\frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \ldots + P_1\frac{dv}{dx} + P_0 v = 0.$$

» Dans cette équation, $P_0, P_1, \ldots P_{n-2}$ sont des fonctions rationnelles en x et en y, et y est lié à x par une relation algébrique

$$(2) \qquad f(x, y) = 0.$$

» D'ailleurs, une ou plusieurs des fonctions P deviendront infinies pour certaines positions du point analytique (x, y): ce seront les points singuliers de notre équation différentielle; à chacun d'eux correspondra une équation déterminante dont les racines pourront être imaginaires ou incommensurables, ou bien être toutes des multiples de $\frac{1}{n}$, n étant un entier positif. Dans ce dernier cas, nous dirons que le point singulier est de la première catégorie; dans le cas contraire, qu'il est de la seconde catégorie. Je laisse de côté le cas où plusieurs des racines sont égales, et qui correspond soit à un point de la seconde catégorie, soit à un point à apparence singulière.

» Il existera, en général, deux fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$, jouissant des propriétés suivantes :

» 1° Elles n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

» 2° Si l'on fait $x = F(z)$, $y = F_1(z)$, la relation (2) est satisfaite.

» 3° Quand z reste intérieur au cercle fondamental, le point analytique (x, y) ne peut passer par aucun point singulier de la seconde catégorie.

» 4° Si (x, y) passe par un point singulier de la première catégorie, $F(z)$ et $F_1(z)$ ont leurs $n - 1$ premières dérivées nulles.

» Alors les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions zétafuchsiennes de z.

» Supposons, en particulier, qu'il n'y ait pas de points singuliers de la première ni de la seconde catégorie, et que la relation (2) soit de genre p; le polygone R_0 correspondant à nos fonctions fuchsiennes pourra être amené à l'une des deux formes suivantes :

» 1° Ou bien un polygone de $4p$ côtés dont les côtés opposés sont conjugués, et dont tous les sommets forment un seul cycle, de telle façon que la somme des angles soit égale à 2π;

» 2° Ou bien un polygone de $4p$ côtés dont les côtés de rang $4q + 1$ et $4q + 3$ sont conjugués, ainsi que les côtés de rang $4q + 2$ et $4q + 4$ (q étant un entier). Ici encore tous les sommets ne forment qu'un cycle, et la somme des angles est égale à 2π. Cette forme de R_0 présente cet avantage que les différents côtés correspondent alors aux périodes *normales* des intégrales abéliennes de première espèce, et que la considération de ces fonctions fuchsiennes permet alors de présenter d'une façon simple la démonstration des relations entre ces périodes.

» Le polygone R_0 peut encore prendre une infinité d'autres formes se ramenant les unes aux autres. Je citerai, entre autres, dans le cas $p = 3$, le polygone de 14 côtés considéré par M. Klein.

» Si $p = 1$, nos fonctions F et F_1 se réduisent à des fonctions doublement périodiques, de sorte que l'on retrouve les résultats connus sur l'intégration des équations linéaires par ces sortes de fonctions, et en particulier ceux de M. Picard.

» On peut retrouver de même les résultats connus relativement à l'intégration algébrique de ces équations. Si ces équations admettent, en effet, des intégrales algébriques, les séries thétazétas, par lesquelles s'expriment nos fonctions zétafuchsiennes, se réduisent d'elles-mêmes à des séries thétafuchsiennes; par conséquent, les intégrales v se ramènent à des fonctions fuchsiennes de z liées à x par des relations algébriques, puisque nous savons qu'il y a toujours une telle relation entre deux fonctions fuchsiennes de même groupe.

» Supposons maintenant que notre équation (1) admette des points singuliers; les sommets de R_0 se répartiront alors non plus en un, mais en plusieurs cycles, qui sont de la première ou de la seconde catégorie, selon que les points singuliers correspondants sont de la première ou de la seconde catégorie.

» Est-ce là la seule manière d'exprimer x, y et v par des fonctions uniformes de z? Non.

» 1° On peut remplacer $F(z)$ et $F_1(z)$ par deux fonctions $F'(z)$ et $F'_1(z)$, jouissant des mêmes propriétés, mais qui sont des fonctions kleinéennes, ou de ces fonctions fuchsiennes qui n'existent que dans une partie du cercle fondamental. Le passage de $F(z)$ à $F'(z)$ se fera par l'*Abbildung* du cercle fondamental sur un certain domaine.

» 2° On peut égaler z à une fonction uniforme de t, et alors x, y et v sont également uniformes en t; de plus, on pourra choisir d'une infinité de manières z en fonction de t, de telle sorte que

$$x = \mathcal{F}(t), \quad y = \mathcal{F}_1(t), \quad v = Z(t),$$

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ étant des fonctions fuchsiennes et Z une fonction zétafuchsienne. Il est quelquefois plus facile de trouver la fonction $\mathcal{F}(t)$ que $F(z)$, comme j'en ai donné l'exemple dans ma Communication du 8 août 1881.

» On peut enfin exprimer x et y par des fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$ existant dans toute l'étendue du plan; mais je ne puis entrer ici dans tous les détails que ce sujet comporte. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable;* par M. **Mittag-Leffler**. (Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

« Mon théorème paru dans les *Comptes rendus* du 18 février peut être modifié d'une manière qui me paraît être d'une certaine importance pour l'étude des nouvelles fonctions que M. Poincaré a introduites dans l'Analyse.

» Je suppose données :

» 1° Une suite infinie de valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots$, toutes inégales et assujetties à la condition

$$\lim_{\nu=\infty} \operatorname{mod} a_\nu = R,$$

où R est une quantité positive quelconque;