devra donner seulement des valeurs non congrues suivant le module k.

$$(\beta)\qquad \begin{vmatrix} -2\mu\mu_1 k & 1 & -2\mu(a+b\rho^2) \\ k & 0 & 0 \\ 2\mu_1(a+b\rho)^2 & 0 & a+b\rho \end{vmatrix},$$

μ_1 étant conjugué de μ, à qui on donnera des valeurs non congrues suivant le module $a+b\rho$.

$$(\gamma)\qquad \begin{vmatrix} 1+4hh_1+4h & -2hh_1 & -4hh_1-2h \\ -2k & k & 2k \\ -(a+b\rho^2)(4h_1+2) & 2h_1(a+b\rho^2) & (1+4h_1)(a+b\rho^2) \end{vmatrix},$$

h étant tel que

$$2h_1+1\equiv 0 \pmod{a+b\rho^2},$$

en excluant toutefois les valeurs pour lesquelles on a

$$\text{soit } h_1\equiv 0 \pmod{a+b\rho},\quad \text{soit } 2h_1+0\equiv 0 \pmod{k},$$

qui donneraient des substitutions rentrant dans les types précédents.

$$(\delta)\qquad \begin{vmatrix} 1+16hh_1+8h & -2hh_1 & -8hh_1-2h \\ -8k & k & 4k \\ -(a+b\rho^2)(16h_1+4) & 2h_1(a+b\rho^2) & (1+8h_1)(a+b\rho^2) \end{vmatrix},$$

h satisfaisant à la fois aux deux congruences

$$4h_1+1\equiv 0 \pmod{a+b\rho^2},\quad 1+4h+4hh_1\equiv 0 \pmod{a+b\rho^2};$$

et enfin

$$(\varepsilon)\qquad \begin{vmatrix} a+b\rho & 0 & 0 \\ 0 & a+b\rho & 0 \\ 0 & 0 & a+b\rho^2 \end{vmatrix}.$$

» Le nombre des systèmes non équivalents est donc

$$2k^2+2k+2(k-2)+2+2 \quad\text{ou}\quad 2k(k+2).\text{ »}$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les groupes discontinus.* Note de M. H. POINCARÉ, présentée par M. Hermite.

« Le fondement de mes recherches sur les fonctions fuchsiennes est l'étude des groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à une variable, c'est-à-dire dans le groupe des substitutions

$$\left(x, \frac{ax+b}{cx+d}\right).$$

Les uns, les groupes fuchsiens, sont tels que a, b, c, d sont réels ou, plus généralement, que leurs substitutions conservent un certain cercle, appelé *cercle fondamental;* les autres, que j'ai appelés *kleinéens,* ne jouissent pas de cette propriété. On peut généraliser cette notion et se demander s'il n'existe pas de groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à deux variables, c'est-à-dire dans le groupe des substitutions

$$(1) \qquad \left(x, y, \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right).$$

» Dans une Note extrêmement intéressante, M. Picard a récemment donné un exemple d'un pareil groupe. Mon but est de montrer que d'autres considérations, arithmétiques, algébriques ou géométriques, permettent d'obtenir une infinité d'autres groupes discontinus.

» **1.** Je supposerai d'abord que les coefficients des substitutions (1) sont réels et que leur déterminant est égal à 1. J'aurai ainsi des groupes analogues aux groupes fuchsiens à coefficients réels. Mais, parmi ceux-ci, il faut faire une distinction : les uns, comme ceux de la première famille, sont discontinus pour toutes les valeurs imaginaires de la variable, mais cessent de l'être pour les valeurs situées sur l'axe des quantités réelles, qui est une ligne singulière essentielle; les autres, comme ceux de la troisième famille, sont discontinus pour les valeurs réelles comme pour les valeurs imaginaires de x. Ce sont des groupes analogues à ces derniers que je vais d'abord chercher à former. Je vais chercher s'il existe des groupes de substitutions de la forme (1), à coefficients réels, qui soient discontinus pour les valeurs réelles de x et de y, ce qui entraînera également la discontinuité pour les valeurs imaginaires de ces variables, au moins dans une certaine étendue.

» Pour former un pareil groupe, il y a d'abord un moyen qui s'offre de lui-même à l'esprit. Considérons une forme quadratique

$$(2) \qquad F(x, y, z)$$

à coefficients entiers; elle admettra une infinité de substitutions semblables à coefficients entiers

$$(3) \qquad (x, y, z,\ ax+by+cz,\ a'x+b'y+c'z,\ a''x+b''y+c''z).$$

Les substitutions correspondantes

$$\left(x, y, \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}\right)$$

formeront un groupe discontinu. Si l'on suppose que les coefficients de la forme (2) et ceux des substitutions semblables (3), au lieu d'être des entiers ordinaires, sont des entiers complexes, on obtient encore de la sorte un groupe discontinu pour les valeurs complexes de x et de y.

» 2. Je veux maintenant montrer comment, de chaque groupe fuchsien, on peut déduire un groupe formé de substitutions de la forme (1), à coefficients réels, et qui est discontinu pour les valeurs réelles et, par conséquent aussi, pour les valeurs imaginaires de x et de y. Soit

$$(4)\quad (x, y, z,\ ax + by + cz,\ a'x + b'y + c'z,\ a''x + b''y + c''z)$$

une substitution dont les coefficients sont réels, sans être nécessairement entiers, et qui reproduit la forme quadratique

$$z^2 - xy.$$

Considérons trois quantités réelles x, y, z, telles que $z^2 - xy$ soit négatif, et adjoignons-leur la quantité complexe t définie par l'équation

$$xt^2 + 2zt + y = 0.$$

A toute substitution linéaire

$$(5)\qquad \left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right),$$

dont les coefficients sont réels, correspondra une substitution de la forme (4) et, par conséquent aussi, une substitution

$$(6)\qquad \left(x, y, \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}\right).$$

lignes R′. Voici comment on pourra passer de la première subdivision à la seconde : on construira la sphère qui admet le cercle fondamental comme grand cercle, et l'on projettera *stéréographiquement* sur cette sphère les polygones R. On les projettera ensuite de nouveau, mais *orthogonalement*, sur le plan de la subdivision primitive, et l'on aura les polygones R′.

» La considération des groupes kleinéens m'aurait donné, par un procédé analogue, des groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à trois variables.

» Enfin, les notions qui précèdent sont susceptibles d'une généralisation très étendue. Mais, pour l'exposer ici, j'ai besoin de faire appel à certaines considérations algébriques et arithmétiques, qui feront, si l'Académie veut bien le permettre, l'objet d'une prochaine Note. »

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur l'application de la résistance des matériaux aux pièces des machines.* Note de M. **H. Léauté**, présentée par M. Rolland.

« Les formules ordinaires de la résistance des matériaux supposent généralement que les composantes et les moments des forces extérieures peuvent être évalués comme s'il n'y avait pas eu de déformation, ce qui permet de ramener le problème à de simples quadratures.

» Cette hypothèse est presque toujours admissible pour les pièces employées dans les constructions civiles, où les efforts extérieurs, principalement dus à la pesanteur et aux réactions des points d'appui, n'éprouvent que de faibles variations par suite des déformations élastiques.

» Il n'en est plus de même pour les pièces de machines, dont les formes et les liaisons sont beaucoup plus compliquées, et dans lesquelles les actions principales proviennent souvent d'efforts élastiques exercés par les pièces en relation avec celle que l'on considère. Ces efforts dépendent essentiellement de la déformation inconnue et ne peuvent plus être convenablement évalués en prenant la pièce à l'état naturel. Le problème change alors de nature, et l'on est conduit, non plus à des quadratures, mais à des équations différentielles.

» Ce sont les équations générales, correspondant à ce cas important pour la théorie des machines, que nous nous proposons d'établir ici, en nous bornant toutefois, pour plus de simplicité, aux pièces planes à section constante, les seules employées habituellement.