

THÉORIE DES GROUPES FUCHSIENS

PAR H. POINCARÉ

à PARIS.

Dans une série de mémoires présentés à l'Académie des Sciences j'ai défini certaines fonctions nouvelles que j'ai appelées fuchsiennes, kleinéennes, thétafuchsiennes et zétafuchsiennes. De même que les fonctions elliptiques et abéliennes permettent d'intégrer les différentielles algébriques, de même les nouvelles transcendentes permettent d'intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. J'ai résumé succinctement les résultats obtenus dans une note insérée aux *Mathematische Annalen*. Ayant l'intention de les exposer en détail, je commencerai, dans le présent travail, par étudier les propriétés des groupes fuchsien, me réservant de revenir plus tard sur leurs conséquences au point de vue de la théorie des fonctions.

§ 1. Substitutions réelles.

Soit z une variable imaginaire définie par la position d'un point dans un plan; t une fonction imaginaire de cette variable définie par la relation:

$$(1) \quad t = \frac{az + b}{cz + d}$$

Je supposerai, ce qui ne restreint pas la généralité, que l'on a:

$$ad - bc = 1.$$

Si le point z décrit deux arcs de courbe se coupant sous un certain angle α , le point t décrira de son côté deux arcs de courbe se coupant

sous le même angle α , c'est à dire que la substitution $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)^{(1)}$ conserve les angles.

La fonction $\frac{az+b}{cz+d}$ est en effet monogène.

Si z décrit un cercle, t décrit également un cercle; c'est à dire que la substitution $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ change les cercles en cercles.

Enfin si z_1, z_2, z_3, z_4 sont quatre valeurs de z et si t_1, t_2, t_3, t_4 sont les valeurs correspondantes de t , on a:

$$(2) \quad \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3} \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}.$$

Il existe en général deux valeurs de z qui sont égales aux valeurs correspondantes de t ; c'est ce qu'on appelle les points doubles de la substitution (1).

Si $(a+d)^2 \geq 4$

les points doubles sont distincts; et si nous les appelons α et β la relation (1) peut s'écrire:

$$(3) \quad \frac{t - \alpha}{t - \beta} = K \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

K étant une constante que j'appellerai *multiplicateur*.

Si au contraire

⁽¹⁾ J'emploierai dans ce qui suit les notations de M. Jordan.

La substitution $[z, f(z)]$ ou bien $[x, y; f(x, y), \varphi(x, y)]$ sera l'opération qui consiste à changer z en $f(z)$ ou bien celle qui consiste à changer x en $f(x, y)$ et y en $\varphi(x, y)$. La substitution inverse de $[z, f(z)]$ sera $[f(z), z]$; le produit de deux substitutions sera l'opération qui consiste à faire successivement ces deux substitutions.

Un système de substitutions formera un *groupe* si la substitution inverse de toute substitution du système et le produit de deux substitutions quelconques du système font également partie du système.

Un groupe A est *isomorphe* à un autre groupe B si à toute substitution de B correspond une et une seule substitution de A et de telle sorte qu'au produit de deux substitutions de B , corresponde le produit des deux substitutions correspondantes de A .

Si B est également isomorphe à A , les deux groupes sont isomorphes entre eux et l'isomorphisme est *holoédrique*; autrement il est *mériédrique*.

$$(a + d)^2 = 4$$

les points doubles se confondent et l'on a :

$$a = \beta.$$

La relation (1) peut alors s'écrire :

$$(4) \quad \frac{1}{t - a} = \frac{1}{z - a} + c$$

Telles sont les principales propriétés des substitutions linéaires $\left(z, \frac{az + b}{cz + d} \right)$. Mais nous allons faire une hypothèse de plus; nous supposons que les coefficients a, b, c, d sont réels. Je dirai alors que la substitution (1) est une *substitution réelle*.

Il en résulte que la partie imaginaire de t est positive, nulle ou négative selon que la partie imaginaire de z est elle-même positive, nulle ou négative; c'est à dire que la substitution (1) conserve l'axe des parties réelles que j'appellerai désormais X et change également en elle-même la partie du plan qui est au dessus de cet axe.

Si z décrit un cercle ayant son centre sur X , t décrira également un cercle ayant son centre sur X . Si z_1 et z_2 sont deux quantités imaginaires conjuguées, les valeurs correspondantes t_1 et t_2 de t seront aussi imaginaires conjuguées.

Si α et β sont deux valeurs de z , γ et δ les valeurs correspondantes de t ; si $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ sont les valeurs conjuguées de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; on aura en vertu de la relation (2)

$$\frac{\alpha - \alpha' \beta - \beta'}{\alpha - \beta' \beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma' \delta - \delta'}{\gamma - \delta' \delta - \gamma'}$$

Si l'on pose pour abrégé :

$$\frac{\alpha - \alpha' \beta - \beta'}{\alpha - \beta' \beta - \alpha'} = (\alpha, \beta)$$

cette relation s'écrira :

$$(5) \quad (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta).$$

Les substitutions réelles ont été étudiées par différents géomètres et en particulier par M^r Klein dans ses recherches sur les fonctions modulaires; il les a partagées en substitutions elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Les substitutions elliptiques sont celles pour lesquelles:

$$(a + d)^2 < 4.$$

Les points doubles α et β sont imaginaires conjugués; l'un d'eux est par conséquent au dessus de X , l'autre au dessous; la relation (1) peut se mettre sous la forme (3) et la constante K est une quantité imaginaire dont le module est l'unité. Si z décrit un cercle passant par α et β , t décrira également un cercle passant par α et β et coupant le premier sous un angle égal à l'argument de K .

La substitution (1) change en elle-même toute circonférence qui ayant son centre sur le prolongement de $\alpha\beta$ coupe ce segment harmoniquement.

Les substitutions paraboliques sont celles pour lesquelles:

$$(a + d)^2 = 4.$$

Les points doubles se confondent en un seul qui est situé sur X . La relation (1) se met sous la forme (4) et de telle sorte que α soit réel. Si z décrit un cercle passant par α , t décrira également un cercle passant par α et tangent au premier. La substitution (1) n'altère pas les circonférences qui sont tangentes à X en α . Soit C une pareille circonférence; soit m_0 un point de cette circonférence C , la substitution (1) le changera en un autre point m_1 de cette même circonférence; elle changera m_1 en un autre point m_2 de C , m_2 en un autre point m_3 , etc. Quand z tendra vers l'infini le point m_z se rapprochera indéfiniment de α . Soit de même m_{-1} le point que la substitution (1) change en m_0 , m_{-2} le point que cette substitution change en m_{-1} , etc. Quand z tendra vers l'infini, le point m_{-z} se rapprochera aussi indéfiniment de α .

J'appelle C_z le cercle qui a son centre sur X et qui passe par α et par m_z ; qui par conséquent coupe orthogonalement le cercle C en α et en m_z . Il est clair que la substitution (1) changera C_{-1} en C_0 , C_0 en C_1 , C_1 en C_2 , etc. et en général C_z en C_{z+1} . De plus si z est infini positif ou négatif, C_z se réduit à un cercle de rayon infiniment petit. C'est dire que si l'on applique une infinité de fois la substitution (1), ou la

substitution inverse à un cercle passant par α et ayant son centre sur X , le rayon de ce cercle devient infiniment petit.

Il en résulte qu'un arc de courbe de longueur finie, ne coupant pas X ne pourra rencontrer un nombre infini de cercles C_x , c'est à dire de transformés successifs d'un cercle C_0 ayant son centre sur X et passant par α .

Les substitutions hyperboliques sont celles pour lesquelles:

$$(a + d)^2 > 4.$$

Les points doubles α et β sont distincts et situés sur X . La relation (1) se met sous la forme (3) et de telle sorte que K soit réel et positif. Je puis de plus toujours supposer:

$$K > 1.$$

Si z décrit un cercle passant par α ou par β , t décrira également un cercle passant par α ou par β et tangent au premier. La substitution (1) n'altère pas les circonférences qui passent par α et β .

J'appelle comme plus haut C une circonférence passant par α et β , et

$$\dots\dots\dots m_{-2}, m_{-1}, m_0, m_1, m_2, \dots\dots\dots$$

une série de points tels que la substitution (1) change m_x en m_{x+1} . Il est clair que le point m_x se rapprochera indéfiniment de β quand x tendra vers $+\infty$ et de α quand x tendra vers $-\infty$.

J'appelle aussi C_x le cercle qui ayant son centre sur X passe par α et par m_x . Lorsque x tendra vers $+\infty$, C_x se rapprochera indéfiniment du cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre; lorsque x tendra vers $-\infty$, le rayon de C_x diminuera indéfiniment. C'est dire que si l'on applique la substitution (1) une infinité de fois à un cercle C_0 passant par α et ayant son centre sur X , on obtiendra à la limite un cercle ayant $\alpha\beta$ pour diamètre. Si on applique une infinité de fois à C_0 la substitution inverse, le rayon limite sera nul.

Si au contraire on appliquait une infinité de fois la substitution (1) à un cercle passant par β et ayant son centre sur X , le rayon limite serait nul, tandis qu'en lui appliquant une infinité de fois la substitution inverse, on obtiendrait à la limite le cercle qui a $\alpha\beta$ pour diamètre.

Il résulte de là qu'un arc de courbe de longueur finie, ne coupant pas X , rencontrera un nombre infini de cercles C_z , c'est à dire de transformés successifs du cercle C_0 , ou bien un nombre fini de ces transformés, selon qu'il rencontrera ou ne rencontrera pas le cercle qui a $\alpha\beta$ pour diamètre.

Si l'on a:

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$$

il existe une substitution réelle qui change α en γ et β en δ . Cette substitution est définie par la relation:

$$\frac{t - \gamma \gamma' - \delta}{t - \delta \gamma' - \gamma} = \frac{z - \alpha \alpha' - \beta}{z - \beta \alpha' - \alpha}$$

Il est une autre propriété des substitutions réelles sur laquelle je voudrais attirer l'attention; en différentiant la relation (1) on trouve:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

Si de plus j'appelle y la partie imaginaire de z , Y celle de t , je trouve:

$$\text{mod } \frac{dt}{dz} = \frac{Y}{y}$$

§ 2. Figures congruentes.

Je dirai que deux figures sont *congruentes* quand l'une est la transformée de l'autre par une substitution *réelle*. Les substitutions réelles formant un groupe, il est clair que deux figures congruentes à une même troisième sont congruentes entre elles.

Je puis énoncer tout d'abord les théorèmes suivants:

Dans deux figures congruentes les angles homologues sont égaux.

Si dans deux figures congruentes, le point γ est homologue de α et le point δ homologue de β , on a:

$$(1) \quad (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta).$$

Cette relation peut prendre une autre forme.

Considérons en effet les quantités α, β et leurs conjuguées α', β' de telle sorte que:

$$(a, \beta) = \frac{a - a' \beta - \beta'}{a - \beta' \beta - a'}$$

Les quatre points $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sont sur un même cercle qui a son centre sur X . Supposons de plus que α et β soient tous deux au-dessus de x . Ce cercle coupe X en deux points que j'appelle h et k ; h sera celui de ces deux points qui est sur l'arc $\beta\beta'$, k celui de ces deux points qui est sur l'arc $\alpha\alpha'$. Je pose

$$[a, \beta] = \frac{a - h \beta - k}{a - k \beta - h}$$

$[a, \beta]$ est essentiellement réel, positif et plus grand que 1. De plus on a :

$$(a, \beta) = \frac{4 [a, \beta]}{([a, \beta] + 1)^2}$$

Si γ est un point de l'arc de cercle $\alpha\beta$, on a :

$$[a, \gamma] [\gamma, \beta] = [a, \beta].$$

Il est clair maintenant qu'en employant cette notation nouvelle, on peut mettre la relation (1) sous la forme :

$$[a, \beta] = [\gamma, \delta].$$

Voyons ce qui se passera quand α et β seront infiniment voisins.

Soit :

$$\begin{aligned} z &= x + y \sqrt{-1} \\ dz &= dx + dy \sqrt{-1} \\ \text{mod } dz &= \sqrt{dx^2 + dy^2}. \end{aligned}$$

On aura, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur :

$$[z, z + dz] = 1 + \frac{\text{mod } dz}{y}$$

ou :

$$L [z, z + dz] = \frac{\text{mod } dz}{y}.$$

On voit ainsi que le logarithme népérien de $[z, z + dz]$ est proportionnel au module de dz et indépendant de son argument.

L'intégrale

$$\int \frac{\text{mod } dz}{y}$$

prise le long d'un arc de courbe quelconque s'appellera la L de cette courbe.

L'intégrale double:

$$\iint \frac{dx dy}{y^2}$$

prise à l'intérieur d'une aire plane quelconque sera la S de cette aire.

D'après ce qui précède deux arcs de courbe congruents ont même L ; deux aires congruentes ont même S . La L d'un arc de cercle $\alpha\beta$ ayant son centre sur X sera le logarithme népérien de $[\alpha, \beta]$.

Je ne puis passer sous silence le lien qui rattache les notions précédentes à la géométrie non-euclidienne de Lobatchewski.

Supposons que l'on convienne d'enlever aux mots *droite*, *longueur*, *distance*, *surface* leur signification habituelle, d'appeler droite tout cercle qui a son centre sur X , longueur d'une courbe ce que nous venons d'appeler sa L , distance de deux points la L de l'arc de cercle qui unit ces deux points en ayant son centre sur X et enfin surface d'une aire plane ce que nous appelons sa S .

Supposons de plus qu'on conserve aux mots *angle* et *cercle* leur signification, mais en convenant d'appeler centre d'un cercle le point qui est à une distance constante de tous les points du cercle (d'après le sens nouveau du mot distance) et rayon du cercle cette distance constante.

Si l'on adopte ces dénominations, *les théorèmes de Lobatchewski sont vrais*, c'est à dire que tous les théorèmes de la géométrie ordinaire s'appliquent à ces nouvelles quantités, sauf ceux qui sont une conséquence du postulatum d'Euclide.

Cette terminologie m'a rendu de grands services dans mes recherches, mais je ne l'emploierai pas ici pour éviter toute confusion.

§ 3. Groupes Discontinus.

Envisageons une infinité de substitutions de la forme:

$$(1) \quad \left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \right)$$

qui, en posant pour abrégé:

$$f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$$

peuvent s'écrire sous la forme:

$$[z, f_i(z)].$$

Pour abrégé encore, je dirai simplement la substitution

$$f_i(z).$$

Je suppose que i est un indice qui varie de 0 à l'infini.

Je suppose de plus:

$$a_0 = d_0 = 1, \quad b_0 = c_0 = 0$$

d'où

$$f_0(z) = z.$$

Je suppose enfin que ces substitutions forment un groupe.

Je vais définir certains symboles dont je serai amené à faire usage dans la suite. Je poserai:

$$f_i^2(z) = f_i[f_i(z)], \quad f_i^3(z) = f_i^2[f_i(z)], \quad \dots \dots \dots f_i^m(z) = f_i^{m-1}[f_i(z)] \dots \dots \dots$$

Je définirai de même, par une extension toute naturelle, le symbole $f_i^m(z)$ quand m sera nul ou négatif. Je poserai:

$$f_i^0(z) = z, \quad z = f_i^{-1}[f_i(z)], \quad f_i^{-m}(z) = f_i^{-1}[f_i^{-m+1}(z)].$$

Si $f_1(z)$ est une des substitutions du groupe envisagé, toutes les substitutions qui sont comprises dans la formule générale:

$$(2) \quad f_1^m(z)$$

feront également partie du groupe.

Si $f_2(z)$ est une substitution du groupe non comprise dans la formule (2), toutes les substitutions de la forme:

$$(3) \quad f_1^\alpha (f_2^\beta (f_1^\gamma (f_2^\delta (\dots \dots \dots (f_1^\lambda (f_2^\mu(z)) \dots \dots \dots)))$$

appartiendront au groupe.

Si maintenant $f_3(z)$ est une substitution du groupe qui ne soit pas comprise dans la formule (3), c'est à dire qui ne soit pas une combinaison de f_1 et de f_2 , si f_4 est une substitution du groupe qui ne soit pas une combinaison de f_1 , f_2 et f_3 , etc. si enfin f_p est une substitution qui ne soit pas une combinaison de $f_1, f_2, \dots \dots \dots f_{p-1}$, les substitutions comprises dans la formule générale:

$$(4) \quad f_{a_1}^{\beta_1} (f_{a_2}^{\beta_2} (\dots (f_{a_n}^{\beta_n} (z)) \dots))$$

(où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des indices qui peuvent être 1, 2, 3, \dots , $p-1$ ou p , et où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sont des entiers positifs ou négatifs) feront également partie du groupe.

Il peut se faire que l'on ait épuisé ainsi toutes les substitutions du groupe envisagé, de telle sorte que toute substitution de ce groupe soit une combinaison de f_1, f_2, \dots, f_p . On dit alors que le groupe est *dérivé* de f_1, f_2, \dots, f_p , ou que f_1, f_2, \dots, f_p sont un système de *substitutions fondamentales* du groupe. Il est évident qu'un groupe peut avoir une infinité de systèmes de substitutions fondamentales; mais *un seul de ces systèmes suffit pour déterminer complètement le groupe*.

On peut concevoir aussi des groupes tels qu'il soit impossible de les faire dériver d'un nombre fini de substitutions fondamentales. Mais nous les laisserons systématiquement de côté.

Soit donc un groupe G dérivé de p substitutions fondamentales f_1, f_2, \dots, f_p de telle sorte que toutes ses substitutions soient de la forme (4).

J'appellerai *exposant* d'une substitution de ce groupe la somme des modules des nombres entiers positifs ou négatifs $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Il peut se faire que les diverses substitutions contenues dans la formule (4) ne soient pas toutes distinctes et que l'on ait identiquement:

$$(5) \quad f_{a_1}^{\beta_1} (f_{a_2}^{\beta_2} (\dots f_{a_n}^{\beta_n} (z)) \dots) = f_{\gamma_1}^{\delta_1} (f_{\gamma_2}^{\delta_2} (\dots f_{\gamma_n}^{\delta_n} (z) \dots))$$

La relation (5) peut toujours se mettre sous la forme:

$$(6) \quad f_{a_1}^{\beta_1} (f_{a_2}^{\beta_2} (\dots f_{a_n}^{\beta_n} (z) \dots)) = z.$$

Les α et les β ont ici la même signification que dans la formule (4).

Les relations de la forme (6) pourront en général être toutes regardées comme les conséquences d'un certain nombre d'entre elles que nous appellerons *relations fondamentales* et qui seront seules réellement distinctes.

Un groupe H sera isomorphe à G s'il est dérivé d'un même nombre de substitutions fondamentales, et si l'on a entre ses substitutions fondamentales les mêmes relations fondamentales. Si entre les substitutions de H il n'y a pas d'autre relation de la forme (6) qu'entre celles de G , l'isomorphisme est réciproque et par conséquent *holoédrique*; autrement il est *mériédrique*.

Par suite des relations (6), une même substitution peut être mise d'une infinité de manières sous la forme (4); de sorte que la définition donnée plus haut de *l'exposant d'une substitution* laisse subsister une certaine ambiguïté. Nous appellerons alors exposant d'une substitution *la plus petite* valeur que peut prendre la somme des modules de $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ quand on écrit cette substitution sous la forme (4).

Ici il y a lieu de faire une distinction importante entre les différentes sortes de groupes formés de substitutions réelles. Nous devons d'abord laisser de côté les groupes qui ne comprennent qu'un nombre fini de substitutions et qui ont déjà été étudiés à fond par plusieurs géomètres. Mais si les substitutions d'un groupe sont en nombre infini, on peut faire deux hypothèses différentes:

On peut supposer qu'il est possible de choisir dans le groupe une substitution

$$(z, f_i(z))$$

telle que $f_i(z)$ diffère infiniment peu de z ; (et cela quel que soit z) c'est à dire que le groupe contient une substitution infinitésimale.

On peut supposer aussi que le groupe ne contient pas de pareille substitution.

Les groupes de la première espèce seront *continus*, ceux de la seconde *discontinus*.

Il ne peut exister de fonction uniforme analytique de z qui reste inaltérée par les substitutions d'un groupe continu, car cette fonction devrait reprendre la même valeur en des points infiniment voisins les uns des autres et, par conséquent, avoir une valeur constante. Aussi les groupes continus n'ont-ils aucun intérêt pour nous et réserverons-nous le nom de *groupes fuchsien* aux groupes discontinus formés de substitutions réelles.

Si le groupe G est discontinu, il est clair qu'on pourra diviser le plan ou une partie du plan en une infinité de régions jouissant des propriétés suivantes:

Chacune d'elles correspondra à l'une des substitutions du groupe G . Celle qui correspondra à la substitution:

$$(z, f_i(z))$$

s'appellera la région R_i et par conséquent celle qui correspondra à la substitution:

$$(z, f_0(z)) \text{ ou } (z, z)$$

s'appellera R_0 .

Quand z sera intérieur à la région R_0 , $f_i(z)$ devra être intérieur à R_i . En d'autres termes, R_i sera la transformée de R_0 par la substitution:

$$(z, f_i(z)).$$

Supposons maintenant que z soit intérieur à la région R_K correspondant à:

$$(z, f_K(z)).$$

$f_K^{-1}(z)$ devra être intérieur à R_0 et par conséquent $f_i(f_K^{-1}(z))$ sera intérieur à R_i .

Dire que R_i est transformée de R_0 par une substitution réelle, c'est dire que ces régions sont congruentes et par conséquent que toutes les régions R sont congruentes entre elles.

Pour me servir d'une expression très usitée de l'autre côté du Rhin, je dirai que la division d'un plan en une infinité de régions est *régulière* lorsqu'en déformant ces régions d'une manière continue on pourra faire coïncider le nouveau mode de division avec l'ancien de telle façon que chaque région de la nouvelle division vienne coïncider avec une région de l'ancienne, et qu'une région donnée quelconque du nouveau mode de division vienne coïncider avec une région *donnée également quelconque* de l'ancien mode. En ce qui concerne le mode de division qui nous occupe, il est clair que si l'on applique aux différentes régions R la substitution

$$[z, f_i(z)]$$

chacune des régions R se changera en une autre région R et R_0 se changera en R_i . C'est dire que la division du plan sera régulière.

Le problème de la recherche des groupes fuchsien se ramène donc au suivant: *Subdiviser d'une façon régulière le plan ou une partie du plan en une infinité de régions toutes congruentes entre elles.*

Deux régions seront dites limitrophes lorsqu'elles confineront entre elles tout le long d'un arc de courbe qui leur servira de frontière commune.

Soit R_p une région limitrophe de R_0 tout le long d'un arc AB de son périmètre; cet arc AB sera *l'un des côtés de R_0* . Mais on peut sup-

poser que ce ne soit pas le plan tout entier, mais une partie du plan qui ait été divisée en une infinité de régions R , toutes congruentes entre elles. Dans ce cas, R_0 pourra confiner tout le long d'un arc CD de son périmètre à la partie du plan qui n'aura pas été subdivisée en régions R . Cet arc CD sera encore *un des côtés de R_0* . Les côtés tels que AB seront ceux de la 1^{ère} sorte, les côtés tels que CD ceux de la 2^{me} sorte.

Je supposerai toujours que les côtés de la 2^{me} sorte sont des segments de l'axe X .

Je justifie en quelques mots cette hypothèse. Si l'on a divisé une partie du plan en une infinité de régions R , et si la région R_0 est contiguë à la partie du plan non divisée, on pourra toujours étendre la division à une portion plus grande du plan. Je l'étendrai jusqu' à ce que R_0 cesse d'être contiguë à la partie non divisée, ou jusqu' à ce que R_0 atteigne l'axe X . Cet aperçu suffira, je pense, pour faire comprendre les raisons qui me permettent d'adopter cette hypothèse.

J'appellerai sommets de R_0 les extrémités de ses côtés et je serai conduit à envisager: 1^o les sommets situés au dessus de X ; 2^o les sommets situés sur X et séparant deux côtés de la 1^{ère} sorte; 3^o les sommets situés sur X et séparant un côté de la 1^{ère} sorte et un de la 2^{me} sorte. J'appellerai ces différents sommets, sommets de la 1^{ère}, de la 2^{de} ou de la 3^{me} catégorie.

Les points

$$z, f_1(z), f_2(z) \dots \dots \dots f_i(z) \dots \dots \dots$$

seront dits *correspondants*.

Quand le point z est à l'intérieur de R_0 , tous les points $f_i(z)$ seront dans des régions R_i différentes de R_0 . Donc il ne peut y avoir dans l'intérieur de R_0 deux points correspondants, et un point intérieur à R_0 ne peut être non plus correspondant d'un point du périmètre de cette région.

Au contraire un point situé sur l'un des côtés de R_0 , sur λ_p par exemple, appartient à la fois à deux régions R_0 et R_p . Si le point z est sur λ_p , c'est à dire sur le périmètre de R_p , le point $f_p^{-1}(z)$ sera sur le périmètre de R_0 sur un côté que j'appellerai λ'_p et qui séparera R_0 d'une région R'_p correspondant à la substitution:

$$(z, f_p^{-1}(z)).$$

Les côtés λ_p et λ'_p seront dits conjugués.

On peut tirer de là les conclusions suivantes: 1° Les côtés de la 1^{ère} sorte sont en nombre pair et conjugués deux à deux. 2° Deux côtés conjugués sont congruents. 3° Les points du périmètre de R_0 (sans parler des sommets dont nous nous occuperons plus loin) sont correspondants deux à deux.

Une convention spéciale est nécessaire pour faire rentrer dans le cas général un cas particulier qui se présentera quelquefois.

Il pourrait arriver que l'on eût identiquement:

$$f_p(z) = f_p^{-1}(z) \text{ ou } z = f_p[f_p(z)].$$

Alors R_p coïnciderait avec R'_p , λ_p avec λ'_p . Mais dans ce cas, la substitution

$$(z, f_p(z))$$

est elliptique et la relation (1) § 1 pourrait se mettre sous la forme (3) § 1 de telle façon que:

$$K = -1.$$

La substitution $(z, f_p(z))$ n'altérant pas le côté λ_p , celui-ci devra passer par le point α (point double de la substitution) et se partager en deux moitiés congruentes entre elles.

Cela posé on pourra regarder le point α comme un sommet et les deux moitiés du côté λ_p comme deux côtés distincts, conjugués entre eux; l'on est ainsi ramené au cas général.

Chaque sommet appartient à trois ou plusieurs régions différentes; il en résulte que plusieurs sommets de R_0 peuvent être correspondants. Je dirai que les sommets correspondants appartiennent à un même cycle.

D'après ce qui précède le nombre des côtés de la 1^{ère} sorte est pair; soit $2n$ ce nombre. Ces $2n$ côtés seront conjugués deux à deux. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n de ces côtés; $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{2n}$ les n autres côtés conjugués des premiers, de telle sorte que les côtés λ_p, λ_{n+p} soient conjugués. Soit R_p la région qui est limitrophe de R_0 le long du côté λ_p , et

$$(z, f_p(z))$$

la substitution correspondante. De cette façon, on aura:

$$f_{n+p}(z) = f_p^{-1}(z).$$

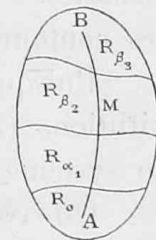
Il est aisé de voir que si l'on sort d'une région R_i correspondant à :

$$(z, f_i(z))$$

par le côté λ_p , on entre dans une région correspondant à la substitution

$$(z, f_i[f_p(z)]).$$

Rien n'est plus facile maintenant que de trouver quelle est la substitution qui correspond à une région donnée R_{β_v} . Soit A un point intérieur à R_0 , B un point intérieur à R_{β_v} ; joignons ces deux points par un arc quelconque AMB . Si je suppose que cet arc AMB parte de la région R_0 , qu'il en sorte par le côté λ_{α_1} pour entrer dans la région R_{α_1} , puis qu'il sorte de R_{α_1} par le côté correspondant à λ_{α_2} pour entrer dans la région R_{β_2} , qu'il sorte de R_{β_2} par le côté correspondant à λ_{α_3} pour entrer dans R_{β_3} , etc. et enfin qu'il sorte de $R_{\beta_{v-1}}$ par le côté correspondant à λ_{α_v} pour entrer dans R_{β_v} ; la substitution qui correspondra à cette région R_{β_v} sera :



$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(f_{\alpha_3}(\dots(f_{\alpha_{v-1}}(f_{\alpha_v}(z))\dots)))]$$

Dans cette expression $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ désignent des indices qui peuvent être 1, 2, \dots ou $2n$.

Donc toute substitution qui correspond à une région que l'on peut atteindre en partant de R_0 et en franchissant un nombre fini de côtés est une combinaison de $(z, f_1), (z, f_2), \dots, (z, f_n)$. Nous laisserons de côté tous les groupes pour lesquels on ne pourrait pas passer d'une région à l'autre en franchissant un nombre fini de côtés. Alors toute substitution sera une combinaison de :

$$(7) \quad (z, f_1), (z, f_2), \dots, (z, f_n).$$

Comment trouverons-nous les relations de la forme (6) qui auront lieu entre les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n ?

Pour cela il suffira évidemment de rechercher comment on peut exprimer par une combinaison des substitutions (7) la substitution :

$$(z, z) \text{ ou } (z, f_0(z))$$

qui correspond à R_0 . On appliquera la règle exposée plus haut; c'est à

dire qu'on décrira un contour fermé quelconque AMA passant par un point A intérieur à R_0 . Si ce contour traverse successivement des régions $R_0, R_{\alpha_1}, R_{\beta_2}, \dots, R_{\beta_{y-1}}, R_{\beta_y} = R_0$ et en sort respectivement par les côtés $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_y}$, la substitution qui correspondra à R_0 sera:

$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\dots(f_{\alpha_y}(z)\dots)))]$$

ce qui permettra d'écrire

$$z = f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\dots(f_{\alpha_y}(z)\dots)).$$

De toutes les relations (6) ainsi obtenues, toutes ne sont pas fondamentales. Pour obtenir les relations fondamentales, il suffit de décrire des contours fermés infinitésimaux autour de chacun des sommets de R_0 .

Puisqu'on trouve ainsi toutes les relations de la forme (6), les substitutions (7) sont généralement indépendantes et par conséquent forment un système de substitutions fondamentales du groupe envisagé.

On voit de plus que l'exposant d'une substitution f_i est le nombre minimum de côtés qu'il faut franchir pour passer de R_0 dans la région qui correspond à la substitution f_i .

Outre les groupes fuchsien ou groupes discontinus formés de substitutions réelles, j'ai été conduit à envisager les groupes discontinus formés de substitutions linéaires quelconques et que j'ai appelés groupes Kleinéens. Je n'en parlerai pas dans le présent travail, me réservant d'exposer dans un mémoire spécial les résultats que j'ai obtenus à leur égard.

§ 4. Polygones générateurs.

Les régions R_i sont définies par la condition que chacune d'elles ne contient qu'un seul point correspondant à un point z donné. Mais cette condition ne suffit pas pour les définir complètement. En effet si l'on se donne un groupe fuchsien G , il y aura une infinité de manières de subdiviser le plan de telle sorte que dans chaque région il n'y ait qu'un point correspondant à un point z donné.

Au contraire si l'on se donne la décomposition du plan en une infinité de régions telles que R , le groupe G sera parfaitement déterminé.

Donnons-nous un groupe G et envisageons les diverses décompositions du plan en régions R_0 qui correspondent à ce groupe. Ces décompositions

sont en nombre infini. Comment de l'une d'elles pourrions-nous déduire toutes les autres? Soit S_0 une portion de la région R_0 , S_i la portion correspondante de la région R_i . Choisissons parmi les substitutions du groupe G l'une quelconque d'entre elles:

$$(z, f_p(z)).$$

Soit i_p l'indice de la substitution:

$$[z, f_p(f_i(z))]$$

de telle sorte que:

$$f_p[f_i(z)] = f_{i_p}(z).$$

Des diverses régions R_i je retranche la portion S_i et j'ajoute à ce qui reste la région S_{i_p} . J'obtiens ainsi une infinité de régions:

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i.$$

Ces régions R'_i recouvriront la même partie du plan que les régions R_i et ne la recouvriront qu'une fois. Chacune d'elles ne contiendra qu'un seul point correspondant à un point donné z . A la décomposition du plan en régions R'_i correspondra donc le même groupe G qu'à la décomposition en régions R_i . Si S_0 est contigu intérieurement à l'une des frontières de R_0 et si S_p est contigu extérieurement à l'une des frontières de $R_0 - S_0$, la région R'_0 sera *d'une seule pièce et sans trou*. La plupart du temps, pour plus de commodité, nous choisirons la région R'_0 de telle sorte qu'elle soit *d'une seule pièce et sans trou*, mais cela n'a rien d'essentiel.

En opérant sur les régions R'_i comme nous avons opéré sur les régions R_i , nous obtiendrons une nouvelle décomposition du plan en régions R''_i qui correspondra toujours au groupe envisagé G . En continuant indéfiniment de la sorte, on obtiendra toutes les décompositions qui correspondent au groupe G .

On est conduit tout naturellement à la généralisation suivante:

Jusqu'ici j'ai supposé que la région S_0 était tout entière intérieure à la région R_0 et par conséquent S_i à la région R_i , et de fait, sans cette hypothèse, on ne saurait ce qu'on doit entendre par la région:

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i$$

à moins toutefois que l'on ne fasse une convention spéciale.

On est conduit ainsi à envisager des régions divisées en deux parties dont l'une est considérée comme positive et l'autre comme négative.

Ainsi si S_i ne fait pas partie de R_i , on considérera la région R'_i comme formée d'une partie positive $R_i + S_{i_p}$ et d'une partie négative S_i . Cet ordre de considérations n'est pas d'ailleurs absolument nouveau.

Si l'on envisage un quadrilatère $ABCD$ dont deux côtés opposés AB et CD se coupent en un point M , ce quadrilatère, formé de deux triangles ADM et BCM opposés par le sommet, s'appelle un quadrilatère concave.

Les formules qui donnent l'aire d'un quadrilatère convexe s'appliquent à une pareille figure pourvu que l'on regarde l'aire de cette figure comme la différence et non comme la somme des aires des deux triangles ADM et BCM . Dans un quadrilatère concave l'un des deux triangles doit donc être regardé comme positif et l'autre comme négatif. Il se passe ici quelque chose d'analogue. Une région *concave* R'_i sera formée d'une portion positive $R_i + S_{i_p}$ et d'une portion négative S_i . Le nombre des points correspondants à un même point donné z , compris dans la partie positive de R'_i , est toujours fini et il surpasse d'une unité le nombre des points correspondants à z compris dans la partie négative.

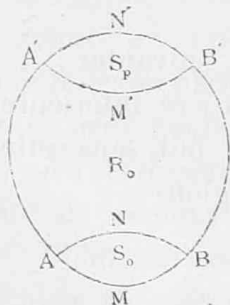
Nous ferons peu d'usage de cette subdivision du plan en régions R_i concaves, parce que la subdivision en régions convexes est infiniment plus commode, mais elle pourra nous servir comme d'intermédiaire pour passer d'une subdivision convexe à une autre subdivision également convexe.

Puisqu'il y a une infinité de manières de subdiviser le plan en régions R_i convexes, nous devons choisir parmi ces diverses manières la plus simple et la plus commode.

Voici comment nous pourrions procéder: Nous déterminerons une région S_0 , et la région S_p transformée de S_0 par la substitution $f_p(z)$.

Nous ajouterons S_p à R_0 et nous en retrancherons S_0 .

Nous obtiendrons ainsi une nouvelle région R'_0 qui pourra servir de base à une nouvelle subdivision du plan en régions R'_i correspondant au groupe G . Car pour obtenir la région R'_i il suffira de retrancher de R_i la région S_i transformée de S_0 par $f_i(z)$ et d'y ajouter la région S_{i_p} transformée de S_p par $f_i(z)$. Comment maintenant conviendra-t-il de choisir les régions S_0 et S_p ?



Soit AMB un côté de R_0 , $A'M'B'$ le côté conjugué. Ces deux côtés sont congruents et la substitution réelle qui change AMB en $A'M'B'$ est une substitution $f_p(z)$ du groupe G . Joignons les points A et B par un arc de cercle ANB ayant son centre sur X . La région S_0 sera la région $AMBNA$ comprise entre l'arc de courbe AMB et l'arc de cercle ANB . Le transformé de ANB par $f_p(z)$ sera un arc de cercle $A'N'B'$ ayant son centre sur X , et la transformée S_p de S_0 sera la région $A'M'B'N'A'$. Si nous ajoutons S_p à R_0 et que nous en retranchions S_0 , nous obtiendrons une région R'_0 analogue à R_0 mais où les côtés conjugués AMB , $A'M'B'$ seront devenus des arcs de cercle ANB , $A'N'B'$ ayant leurs centres sur X .

En opérant de même manière sur chaque paire de côtés conjugués de la 1^{ère} sorte, on réduira tous ces côtés à des arcs de cercle ayant leurs centres sur X . On peut donc toujours supposer que la région R_0 est un polygone dont les côtés sont de deux sortes, les uns sont des arcs de cercle ayant leurs centres sur X , les autres sont des segments de cet axe X lui-même. Un pareil polygone s'appellera *polygone normal*.

Mais une difficulté spéciale peut se présenter dans certains cas.

En effet nous ne nous sommes pas inquiétés de savoir si la région:

$$S_0 = AMBNA$$

faisait tout entière partie de R_0 . Il pourra donc se faire que le polygone normal auquel on aura réduit la région R_0 soit concave.

Voici comment on se tirerait d'affaire en pareil cas. Il est clair que la partie positive et la partie négative de R_0 devront être toutes deux des polygones normaux. Supposons pour fixer les idées que la partie positive contienne au plus deux points correspondants à un point donné z . Parmi les points de R_0 , il y en aura qui seront compris dans la partie positive et qui n'admettront aucun correspondant soit dans la partie positive, soit dans la partie négative. Ils formeront un certain polygone normal P .

La partie négative formera un certain polygone normal P' ; et à chaque point de cette partie négative correspondront deux points de la partie positive dont l'ensemble formera deux polygones normaux P'' et P''' , tous deux congruents à P' . Cela posé, retranchons de R_0 le polygone P'' et ajoutons-y le polygone congruent P' . Nous obtiendrons ainsi une nouvelle région R'_0 qui pourra servir comme R_0 à engendrer le groupe

fuchsien G . Cette région n'aura plus de partie négative et sera formée des deux polygones P et P''' .

Ce sera donc un *polygone normal convexe*.

On voit ainsi que dans tous les cas possibles, on peut supposer que R_0 est un *polygone normal convexe*.

Si l'on connaît le polygone normal R_0 et la distribution de ses côtés en paires de côtés conjugués, le groupe G est entièrement déterminé.

En effet reportons-nous à ce que nous avons vu dans le § précédent:

Les substitutions fondamentales de G sont celles qui correspondent aux régions limitrophes de R_0 ; on les obtiendra donc en envisageant un des côtés de la 1^{ère} sorte de R_0 et en cherchant quelle est la substitution qui change ce côté en son conjugué. Or soient AB et $A'B'$ deux côtés conjugués. Ces deux côtés, d'après le § 3, devront être congruents, c'est à dire que l'on aura:

$$(A, B) = (A', B').$$

Or dans ce cas, d'après le § 1, il existe une substitution réelle qui change AB en $A'B'$ et en général cette substitution est parfaitement déterminée. Les substitutions fondamentales du groupe G et par conséquent le groupe G lui-même sont donc parfaitement déterminés.

C'est pour cette raison que j'appellerai le polygone R_0 *polygone générateur* du groupe G .

§ 5. Classification en familles.

Nous avons vu plus haut que deux, trois ou plusieurs des sommets du polygone R_0 peuvent être des points correspondants et nous avons appelé cycle l'ensemble des sommets de ce polygone qui sont correspondants à l'un d'entre eux.

Les sommets de R_0 se répartissent de la sorte en un certain nombre de cycles. Voyons comment, connaissant la distribution en paires des côtés de la 1^{ère} sorte, on pourra trouver la distribution des sommets en cycles. Pour cela il suffit d'appliquer la règle suivante que l'on démontrerait sans peine.

Supposons qu'on parcoure dans un certain sens le périmètre du polygone R_0 , et qu'on rencontre successivement un côté, puis un sommet,

puis un autre côté, puis un autre sommet et ainsi de suite. Cela posé, partons d'un sommet quelconque; envisageons le côté suivant, puis son conjugué si ce côté est de la 1^{ère} sorte; puis le sommet suivant, puis le côté suivant, puis son conjugué si ce côté est de la 1^{ère} sorte, et ainsi de suite. On pourra continuer ainsi jusqu'à ce qu'on revienne au sommet qui a servi de point de départ, ou bien jusqu'à ce qu'on arrive à un côté de la 2^{de} sorte.

Dans le premier cas, tous les sommets que l'on aura rencontrés de la sorte formeront un cycle. Dans le second cas, il sera nécessaire pour compléter le cycle de reprendre le sommet qui a servi de point de départ et de remonter à partir de ce sommet, en considérant successivement le côté précédent, puis son conjugué si ce côté est de la 1^{ère} sorte, puis le sommet précédent, puis le côté précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on finisse par arriver à un côté de la 2^{de} sorte.

Il est aisé de voir qu'il y a trois catégories de cycles: Tout point correspondant d'un point z situé au dessus de X est lui-même au dessus de X , donc tout sommet correspondant d'un sommet de la 1^{ère} catégorie (§ 3) est lui-même de la 1^{ère} catégorie. Il y aura donc des cycles formés uniquement de sommets de la 1^{ère} catégorie; ce seront les *cycles de la 1^{ère} catégorie*. En partant d'un sommet de la 1^{ère} catégorie et prenant successivement les côtés et les sommets que l'on rencontre en appliquant la règle précédente, on ne rencontrera jamais que des sommets de la 1^{ère} catégorie et par conséquent aussi jamais que des côtés de la 1^{ère} sorte. On ne sera donc arrêté que quand on sera revenu au sommet qui aura servi de point de départ, c'est à dire que le cycle sera *fermé*.

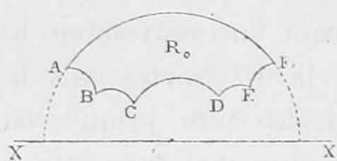
Tout sommet correspondant d'un sommet de la 2^{de} ou de la 3^{me} catégories, devra lui-même appartenir à l'une des deux catégories. Ce qui nous amène à considérer deux nouvelles classes de cycles.

Les *cycles de la 2^{de} catégorie* ne contiendront que des sommets de la 2^{de} catégorie; en leur appliquant la règle précédente, on ne rencontrera pas de côté de la 2^{de} sorte, c'est à dire que le cycle sera encore *fermé*.

Les *cycles de la 3^{me} catégorie* contiendront des sommets de la 3^{me} catégorie et pourront en contenir également de la 2^{de}; en leur appliquant la règle précédente, on rencontrera des côtés de la 2^{de} sorte, c'est à dire que le cycle sera *ouvert*. Cela va nous permettre de classer en familles les polygones R_0 et par conséquent les groupes G .

Le polygone R_0 sera
 de la 1^{ère} famille s'il a des cycles de la 1^{ère} catégorie seulement
 » » 2^{me} » » » » » » 2^{me} » »
 » » 3^{me} » » » » » » 3^{me} » »
 » » 4^{me} » » » » » » 2^{me} et de la 3^{me} catégorie seulement
 » » 5^{me} » » » » » » 1^{ère} » » » 3^{me} » »
 » » 6^{me} » » » » » » 1^{ère} » » » 2^{me} » »
 » » 7^{me} » » » » » » des trois catégories.

Quelques exemples feront mieux comprendre ma pensée.



Exemple I. Le polygone R_0 est un hexagone $ABCDEF$; tous les côtés sont de la 1^{ère} sorte; les côtés

AB et AF
 BC et FE
 CD et ED

sont conjugués. Appliquons la règle, nous rencontrerons successivement:

1° en partant du sommet A , le sommet A , le côté AB , le côté AF et le sommet A .

2° en partant de B , le sommet B , puis BC , puis EF , puis F , puis FA , puis AB , puis B .

3° en partant de C , le sommet C , puis CD , puis ED , puis E , puis EF , puis BC , puis C .

4° en partant de D , le sommet D , puis DE , puis CD , puis D .

Il y a donc quatre cycles formés respectivement:

1° du sommet A

2° des sommets B et F

3° des sommets C et E

4° du sommet D .

Exemple II. Le polygone R_0 est toujours un hexagone $ABCDEF$ dont tous les côtés sont de la 1^{ère} sorte; mais les côtés opposés

AB et DE
 BC et EF
 CD et FA

sont conjugués. Appliquons la règle, nous rencontrerons successivement

1° en partant de A , le sommet A , puis AB , puis DE , puis E , puis EF , puis BC , puis C , puis CD , puis FA , puis A .

2° en partant de B , le sommet B , puis BC , puis EF , puis F , puis FA , puis CD , puis D , puis DE , puis AB , puis B .

Il y a donc deux cycles formés respectivement:

1° des sommets A, C et E

2° des sommets B, D et F .

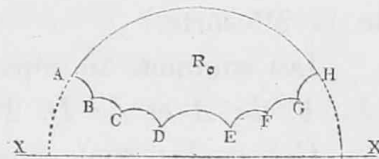
Exemple III. Le polygone R_0 est un octogone $ABCDEFGH$ dont tous les côtés sont de la 1^{ère} sorte, les côtés opposés:

AB et EF

BC et FG

CD et GH

DE et HA



sont conjugués.

Partons du sommet A , nous rencontrerons successivement: A , AB , EF , F , FG , BC , C , CD , GH , H , HA , DE , E , EF , AB , B , BC , FG , G , GH , CD , D , DE , HA , A .

Tous les sommets font donc partie d'un même cycle.

Exemple IV. Supposons maintenant que les côtés:

AB et CD

BC et DE

EF et GH

FG et HA

soient conjugués.

Partons encore de A , nous rencontrerons:

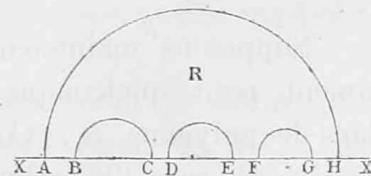
A , AB , CD , D , DE , BC , C , CD , AB , B , BC , DE , E , EF , GH , H , HA , FG , G , GH , EF , F , FG , HA , A .

Tous les sommets font encore partie d'un même cycle.

Dans les quatre exemples précédents, tous les côtés sont de la 1^{ère} sorte, tous les cycles sont donc de la 1^{ère} ou de la 2^{de} catégories.

Exemple V. Le polygone R_0 est encore un octogone $ABCDEFGH$.

Les côtés AB , CD , EF , GH sont de la 1^{ère} sorte, les côtés BC , DE , FG , HA sont de la 2^{de} sorte. Les côtés:



AB et CD

EF et GH

sont conjugués. On rencontrera successivement:

1° en partant de A , le côté AB , puis CD , puis D , puis DE qui est de la 2^{de} sorte.

2° en partant de C , le côté CD , puis AB , puis B , puis BC qui est de la 2^{de} sorte.

3° en partant de E , le côté EF , puis GH , puis H , puis HA qui est de la 2^{de} sorte.

4° en partant de G , le côté GH , puis EF , puis F , puis FG qui est de la 2^{de} sorte.

Les sommets se répartissent donc en 4 cycles formés respectivement:

1° de A et de D , 2° de C et de B , 3° de E et de H , 4° de G et de F .

Ces cycles sont *ouverts*, puisque dans la recherche de chacun d'eux on a été arrêté par la rencontre d'un côté de la 2^{de} sorte. Ils sont donc de la 3^{me} catégorie.

On peut pousser plus loin encore la classification des polygones R_0 et des groupes G . Voici de quelles considérations nous pourrions faire usage à cet effet.

Considérons d'abord un cycle de la 1^{ère} catégorie et un sommet A_0 de R_0 faisant partie de ce cycle. Soit B_1 le côté suivant, C_1 son conjugué, A_1 le sommet suivant, B_2 le côté suivant, C_2 son conjugué, A_2 le sommet suivant et ainsi de suite, on poursuivra de la sorte jusqu'à ce qu'on arrive à un sommet A_n coïncidant avec A_0 .

On pourra même poursuivre indéfiniment de cette façon sans être jamais arrêté puisque l'on ne rencontrera pas de côté de la 2^{de} sorte. Mais le sommet A_n ne différera pas de A_0 , le sommet A_{n+1} de A_1 , et en général le sommet A_h de A_k si on a

$$h \equiv k \pmod{n}.$$

Le cycle se compose alors de n sommets distincts, à savoir A_0, A_1, \dots, A_{n-1} .

Supposons maintenant que l'on décrive autour de A_0 un cycle infiniment petit quelconque; on sortira de R_0 par le côté B_1 , pour entrer dans le polygone R_1 . Considéré comme appartenant à ce dernier polygone, le côté B_1 sera l'homologue de C_1 ; par conséquent le point A_0 sera l'ho-

mologue de A_1 et le côté suivant sera l'homologue de B_2 . Le cycle infiniment petit décrit autour de A_0 sortira ensuite du polygone R_1 en franchissant ce côté homologue de B_2 et entrera dans un certain polygone que j'appelle R_2 . Considéré comme appartenant à ce polygone, le côté qui dans R_1 était homologue de B_2 sera homologue de C_2 ; le point A_0 sera homologue de A_2 et le côté suivant l'homologue de B_3 .

On continuera de la sorte, la loi est manifeste. On passera successivement dans les polygones $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{q-1}$ et enfin dans R_q qui devra se confondre avec R_0 .

On sortira du polygone R_k pour entrer dans le polygone R_{k+1} en franchissant un côté qui envisagé comme appartenant à R_k sera l'homologue de B_{k+1} et envisagé comme appartenant à R_{k+1} sera l'homologue de C_{k+1} . Le sommet A_0 envisagé comme appartenant à R_k sera l'homologue de A_k .

Mais le polygone R_q doit se confondre avec R_0 ; donc le sommet A_q ne doit pas différer de A_0 , on a donc

$$q \equiv 0 \pmod{n}$$

d'où:

$$q = pn.$$

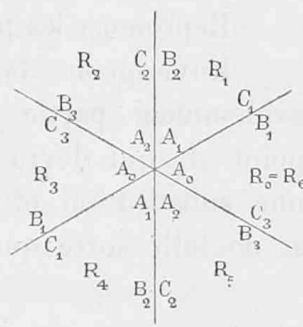
Le nombre des polygones qui ont un sommet en A_0 sera donc divisible par n .

La figure ci-jointe éclaircira peut-être ce qui précède. Nous y avons supposé

$$n = 3, \quad p = 2.$$

Nous n'avons représenté que les parties des polygones qui sont infiniment voisines de A_0 ; c'est pourquoi chacun de ces polygones est représenté seulement par un angle. Dans le voisinage de chaque sommet A (ou de chaque côté B ou C) et à l'intérieur de chaque polygone R_i , nous avons marqué une lettre indiquant quel est le sommet (ou le côté) de R_0 dont ce sommet A (ou ce côté B ou C) est l'homologue si on l'envisage comme faisant partie du polygone R_i .

Nous avons donc autour du point A_0 pn angles dont la somme doit être égale à 2π , et comme dans deux polygones congruents les angles homologues sont égaux, on aura:



$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{q-1} = 2\pi.$$

Or on a :

$$A_{kn} + A_{kn+1} + A_{kn+2} + \dots + A_{kn+n-1} = A_0 + A_1 + \dots + A_{n-1}.$$

Il vient donc :

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} = \frac{2\pi}{p}$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

La somme des angles de R_0 qui correspondent aux sommets d'un même cycle de la 1^{ère} catégorie est une partie aliquote de 2π .

Mais ici deux cas peuvent se présenter : ou bien la somme de ces angles sera égale à 2π , ou bien à 2π divisé par un nombre entier plus grand que 1.

Dans le premier cas je dirai que le cycle appartient à la 1^{ère} sous-catégorie ; dans le second cas, qu'il appartient à la 2^e sous-catégorie.

Les propriétés des cycles de ces deux sous-catégories ne sont pas tout à fait les mêmes ; c'est ce qui nous engage à faire dans la 1^{ère} famille une coupure, et à séparer, sous le nom de 1^{er} ordre, les polygones R_0 dont tous les cycles sont de la 1^{ère} sous-catégorie, pendant que les autres polygones R_0 qui auront un cycle de la 2^{de} sous-catégorie formeront le 2^e ordre.

Reprenons les polygones R_0, R_1, \dots, R_{q-1} qui ont un sommet en A_0 .

Envisageons la substitution réelle qui change R_0 en R_n et qui fait évidemment partie du groupe G . Cette substitution ne changera pas le point A_0 qui devra par conséquent en être un point double. C'est donc une substitution elliptique ; elle pourra se mettre sous la forme (3) § 1 et de telle sorte que

$$K = e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

Supposons maintenant que le point A_0 au lieu d'appartenir à un cycle de la 1^{ère} catégorie, appartienne à un cycle de la 2^e catégorie. Tous les raisonnements précédents s'appliqueront, puisque nous n'avons supposé qu'une chose : c'est que le cycle était fermé, et puisque cela est vrai des cycles de la 2^{de} comme de ceux de la 1^{ère} catégorie. Seulement le nombre q et par conséquent le nombre p seront infinis. La somme des angles correspondant aux divers sommets du cycle sera donc nulle et c'est ce qu'il était

aisé de prévoir, puisque tout angle d'un polygone normal dont le sommet est sur X est évidemment nul. La substitution réelle qui change R_0 en R_n ne changera pas A_0 . Ce sommet en sera donc un point double, et comme il est sur X , la substitution sera parabolique ou hyperbolique.

Soit S cette substitution; soit C_k le côté qu'il faut franchir pour passer de R_k dans R_{k+1} . C_{k+n} sera le transformé de C_k par S , de sorte que les divers côtés C_k seront les transformés successifs de C_0, C_1, \dots, C_{n-1} par la substitution S et la substitution inverse.

Supposons d'abord que la substitution S soit parabolique. Nous avons vu (§ 1) qu'un arc fini de courbe qui ne coupe pas X ne peut rencontrer qu'un nombre fini de transformés successifs d'un cercle tel que C_0 par une substitution telle que S et par sa substitution inverse. Un pareil arc ne passera donc qu'à travers un nombre fini des polygones $R_0, R_1, \dots, R_q, \dots$ qui ont un sommet en A_0 .

Supposons au contraire que la substitution S soit hyperbolique. Soient A_0 et A'_0 les deux points doubles de cette substitution, C le cercle décrit sur $A_0 A'_0$ comme diamètre. Nous avons vu (§ 1) qu'un arc fini de courbe qui ne coupe pas X rencontre un nombre infini de transformés successifs d'un cercle tel que C_0 ou n'en rencontre qu'un nombre fini, suivant qu'il coupe ou ne coupe pas le cercle C . Un pareil arc traversera donc un nombre infini des polygones $R_0, R_1, \dots, R_q, \dots$ s'il coupe C , et il n'en traversera qu'un nombre fini s'il ne coupe pas C . Si la substitution S est parabolique, nous dirons que le cycle auquel appartient A_0 est de la 3^{me} sous-catégorie; si elle est hyperbolique, nous dirons que le cycle est de la 4^e sous-catégorie.

Cela va nous permettre de subdiviser les 2^e, 4^e, 6^e, 7^e familles.

Un groupe de l'une de ces familles appartiendra au 1^{er} ordre de cette famille s'il ne contient pas de cycle de la 4^e sous-catégorie, et au 2^d ordre s'il contient des cycles de la 4^e sous-catégorie.

§ 6. Existence des groupes fuchsien.

Jusqu'ici nous avons raisonné sur les groupes fuchsien en supposant qu'ils existaient et nous n'en avons pas démontré l'existence. Nous avons vu que tout groupe fuchsien G peut être considéré comme engendré par un polygone normal R_0 dont les côtés sont de deux sortes; ceux de la

1^{ère} sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X , ceux de la 2^{de} sorte sont des segments de l'axe X lui-même. Les côtés de la 1^{ère} sorte sont au nombre de $2n$ et se répartissent en paires de côtés conjugués. Quand on connaît le polygone R_0 et la répartition de ses côtés en paires, le groupe G correspondant est en général parfaitement déterminé. Quant aux sommets, ils se répartissent en un certain nombre de cycles.

Pour pouvoir donner naissance à un groupe fuchsien G , le polygone R_0 doit satisfaire à deux conditions:

1° *Deux côtés conjugués doivent être congruents.*

2° *La somme des angles d'un même cycle de la 1^{ère} catégorie doit être une partie aliquote de 2π .*

Ces conditions sont nécessaires; sont elles suffisantes? C'est ce que je vais démontrer.

Je suppose que le polygone R_0 soit donné, ainsi que la distribution de ses côtés de la 1^{ère} sorte. De cette connaissance résulte celle des substitutions fondamentales du groupe correspondant et par conséquent la possibilité de construire les polygones R limitrophes de R_0 . Opérant sur ceux-ci comme on a opéré sur R_0 , on construira les polygones limitrophes des polygones déjà obtenus et continuant indéfiniment cette opération, on construira une infinité de polygones congruents à R_0 . Mais ici plusieurs hypothèses peuvent être faites:

1° Ou bien les polygones ainsi construits couvriront une partie du plan mais ne la couvriront qu'une fois de manière à ne pas empiéter les uns sur les autres et à ne pas se recouvrir mutuellement. Alors ils formeront une sorte de damier; la portion du plan envisagée sera partagée en un certain nombre de régions congruentes entre elles. *L'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 sera donc démontrée.*

2° Ou bien les polygones construits de la sorte empièteront les uns sur les autres de façon à recouvrir une partie du plan plusieurs fois ou même une infinité de fois. Dans ce cas le groupe auquel conduirait R_0 (c'est à dire le groupe dont les substitutions fondamentales sont celles qui changent chaque côté de la 1^{ère} sorte de R_0 en son conjugué) est continu; ce n'est pas un groupe fuchsien.

Comment reconnaitrons-nous maintenant quel est celui de ces deux cas auquel nous avons affaire? Considérons un point quelconque A , intérieur à R_0 , et un second point B quelconque. Joignons A à B par un

arc de courbe quelconque AMB . Cet arc sortira de R_0 par un certain côté C_0 ; on construira alors le polygone R_1 , limitrophe de R_0 le long de C_0 ; si AMB sort de R_1 par un côté C_1 , on construira le polygone R_2 , limitrophe de R_1 le long de C_1 et ainsi de suite.

Les arcs AMB seront de deux sortes:

1° Ou bien après un nombre fini d'opérations de ce genre on finira par trouver un polygone R_n duquel ne sorte plus l'arc AMB , de telle façon que le point B soit à l'intérieur de R_n ; c'est alors que le point B se trouve dans la partie du plan recouverte par les polygones R et que l'arc AMB ne sort pas de cette partie du plan: l'arc AMB sera de la 1^{ère} sorte.

2° Ou bien, quelque grand que soit le nombre des opérations effectuées, on ne trouvera jamais un polygone R_n duquel ne sorte plus l'arc AMB . L'arc AMB sera alors de la 2^e sorte.

Au sujet du point B on peut faire trois hypothèses:

1° Tous les arcs AMB que l'on peut tracer entre A et B sont de la 2^e sorte; le point B est alors hors de la partie du plan recouverte par les polygones R .

2° Parmi les arcs AMB tracés entre A et B , il y en a de la 1^{ère} sorte; chacun de ces arcs conduit, d'après ce qui précède, à un polygone R_n à l'intérieur duquel se trouve B . De plus ce polygone R_n est le même quel que soit l'arc AMB de la 1^{ère} sorte par lequel on a joint les deux points A et B . Dans ce cas le point B est dans la partie du plan recouverte par les polygones R ; de plus ces polygones ne recouvrent cette partie du plan qu'une seule fois et l'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est démontrée.

3° Parmi les arcs AMB tracés entre A et B il y en a de la 1^{ère} sorte, chacun d'eux conduit à un polygone R_n à l'intérieur duquel se trouve B ; mais ce polygone change quand on change l'arc AMB . Dans ce cas le point B est dans la partie du plan recouverte par les polygones R ; mais ces polygones recouvrent cette partie du plan plus d'une fois de telle sorte qu'il n'y a pas de groupe fuchsien correspondant à R_0 .

Nous sommes donc conduits à la règle suivante.

Il faut joindre deux points A et B par deux arcs AMB , ANB de la 1^{ère} sorte et rechercher si ces deux arcs conduisent à un même polygone R_n .

Mais nous pouvons la modifier de la manière suivante: On trace un

contour fermé AMA , dont le point initial et final A est intérieur à R_0 ; si cet arc AMA sort de R_0 par un côté C_0 , on construira le polygone R_1 , limitrophe de R_0 le long de C_0 ; s'il sort de R_1 par un côté C_1 , on construira le polygone R_2 , limitrophe de R_1 le long de C_1 et ainsi de suite. Je suppose de plus que l'arc AMA soit de la 1^{ère} sorte, c'est à dire qu'on l'ait choisi de telle manière qu'après un nombre fini d'opérations, on arrive à un polygone R_n d'où ne sorte plus l'arc AMA . *Pour que le groupe fuchsien existe, il faut et il suffit que, quel que soit le contour AMA de la 1^{ère} sorte, le polygone R_n soit précisément R_0 .*

Supposons d'abord que le polygone R_0 envisagé n'admette pas de cycle de la 4^e sous-catégorie.

Dans ce cas j'énoncerai les théorèmes suivants:

I. *Tout arc de courbe AMB qui coupe X est de la 2^e sorte.* En effet le polygone R_0 est tout entier au-dessus de X et il en est par conséquent de même de tous les polygones R qui lui sont congruents. Supposons qu'on construise les polygones R_1, R_2, \dots, R_n comme il a été dit plus haut. Ils seront tous dans la partie du plan située au dessus de X et comme l'arc AMB doit sortir de cette partie du plan, il devra sortir de R_n quelque grand que soit n . C. Q. F. D.

II. *Tout arc AMB qui ne coupe pas X est de la 1^{ère} sorte.* En effet je construis comme il a été dit plus haut les polygones

$$R_1, R_2, \dots, R_p \dots$$

et j'appelle λ_p la portion de l'arc AMB qui est à l'intérieur du polygone R_p . L'arc AMB va se trouver décomposé en une série d'arcs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ correspondant à la série des polygones R_0, R_1, R_2, \dots . Le nombre de ces arcs (qui est celui des polygones correspondants) sera fini si AMB est de la 1^{ère} sorte (ce que nous nous proposons de démontrer) et infini dans le cas contraire.

L'arc λ_p joindra évidemment deux côtés de la 1^{ère} sorte du polygone R_p , car il ne doit pas couper X et ne peut par conséquent aboutir à un côté de la 2^e sorte puisque ces côtés sont des segments de X . On peut d'ailleurs faire deux hypothèses:

1° On peut supposer que les deux côtés auxquels aboutit l'arc λ_p sont deux côtés consécutifs du polygone R_p séparés seulement par un

sommet A_p de ce polygone. Je dirai que λ_p est de la 1^{ère} espèce et qu'il sous-tend le sommet A_p . Exemples, les arcs CD et FG de la figure en bas.

2° On peut supposer que les deux côtés auxquels aboutit l'arc λ_p ne sont pas consécutifs, et dans ce cas je dirai que λ_p est de la 2^e espèce. Exemple, l'arc AB de la figure. Le polygone R_p étant congruent à R_0 , l'arc λ_p sera congruent à un certain arc λ joignant deux points du périmètre de R_0 appartenant à deux côtés non consécutifs. Il est clair que la distance de ces deux points ne pourra être infiniment petite et que par conséquent la L (voir § 1) de cet arc λ ne sera pas non plus infiniment petite, mais sera plus grande qu'une certaine quantité donnée K . La L de l'arc λ_p sera la même que celle de l'arc congruent λ ; elle sera donc plus grande que K .

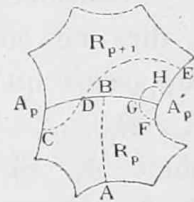
Soit L_0 la L de l'arc AMB ; elle est finie parce que cet arc ne coupe pas X . Le nombre des arcs λ_p de la seconde espèce sera donc plus petit que $\frac{L_0}{K}$, et par conséquent *limité*.

On pourra donc prendre q assez grand pour que les arcs λ_{q+1} , λ_{q+2} , et en général les arcs λ_p où $p > q$ soient tous de la 1^{ère} espèce; il reste à démontrer que le nombre de ces arcs λ_p ($p > q$) est fini.

J'envisage deux arcs consécutifs λ_p et λ_{p+1} et l'arc $\mu_p = \lambda_p + \lambda_{p+1}$ formé par leur réunion; je dirai que l'arc μ_p est de la 1^{ère} catégorie si les arcs λ_p et λ_{p+1} sous-tendent un même sommet, et de la 2^e catégorie dans le cas contraire. Ainsi l'arc CE de la figure sera de la 2^e catégorie et l'arc FH de la première, parce que l'arc CD sous-tend le sommet A_p pendant que les arcs FG , GH et DE sous-tendent le sommet A'_p .

Envisageons un arc μ_p de la 2^e catégorie: il aboutira à deux côtés de la 1^{ère} sorte appartenant l'un à R_p , l'autre à R_{p+1} et il traversera le côté C_p qui sert de frontière commune à ces deux polygones; d'ailleurs ces trois côtés n'ont aucun point commun.

Le polygone R_p étant congruent à R_0 , le côté C_p sera congruent à un des côtés H de R_0 . Soit R' celui des polygones R qui est limitrophe de R_0 le long de H ; l'arc μ_p sera congruent d'un certain arc μ dont l'une des extrémités sera sur un des côtés B de R_0 et l'autre sera sur un des côtés B' de R' ; cet arc traversera le côté H . D'ailleurs les trois côtés B , H et B' n'auront aucun point commun.



Dans ces conditions il est clair que la L de l'arc μ et par conséquent celle de μ_p n'est pas infiniment petite et est plus grande qu'une quantité fixe K . Il suit de là, comme plus haut, que le nombre des arcs μ_p de la 2^{me} catégorie est *limité* et qu'on pourra prendre q assez grand pour que tous les arcs $\mu_{q+1}, \mu_{q+2}, \dots$ et en général μ_p ($p > q$) soient tous de la 1^{ère} catégorie; en d'autres termes tous les arcs $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}$ etc. et en général tous les arcs λ_p ($p > q$) sous-tendront un même sommet D .

Il reste à démontrer que le nombre de ces arcs λ_p sous-tendant le sommet D est fini. Nous pouvons faire deux hypothèses:

1° Ou bien D appartient à un cycle de la 1^{ère} ou de la 3^{me} catégorie, et alors ce sommet n'appartient qu'à un nombre fini de polygones R , et par conséquent le nombre des arcs λ_p est nécessairement fini.

2° Ou bien D appartient à un cycle de la 2^{de} catégorie, c'est à dire de la 3^{me} sous-catégorie, puisque nous avons supposé que le polygone R_0 n'admettait pas de cycles de la 4^{me} sous-catégorie. Nous avons vu (§ 5) qu'un arc de courbe ne coupant pas X ne pouvait traverser qu'un nombre fini des polygones auxquels appartient le sommet D . Il suit de là que le nombre des arcs λ_p est fini.

Donc dans tous les cas, le nombre des arcs λ_p est fini; donc l'arc AMB est de la 1^{ère} sorte. C. Q. F. D.

Donc la partie du plan recouverte par les polygones R est la partie située au-dessus de X .

Considérons maintenant un contour fermé AMA de la 1^{ère} sorte, c'est à dire ne coupant pas X ; appliquons lui la règle exposée plus haut et supposons qu'en le parcourant on rencontre successivement les polygones R_0, R_1, \dots pour arriver au polygone R_n quand on sera de retour au point A . Si le polygone R_n est précisément R_0 , je dirai que AMA est de la 1^{ère} espèce et, dans le cas contraire, qu'il est de la 2^{de} espèce. Pour que le groupe fuchsien existe il faut et il suffit que tous les contours AMA de la 1^{ère} sorte soient de la 1^{ère} espèce. A ce sujet je démontrerai successivement les théorèmes suivants:

III. *Si le contour AMA se compose 1° d'un arc de courbe AMB , 2° d'un contour fermé infiniment petit BNB , 3° de l'arc AMB parcouru en sens contraire, il est de la 1^{ère} espèce.*

En effet construisons successivement, d'après la règle exposée plus haut, les polygones $R_0, R_1, R_2, \dots, R_m$ que l'on rencontre en parcourant l'arc

AMB. Parcourons ensuite le contour infiniment petit *BNB*. On peut faire au sujet de ce contour trois hypothèses:

1° Ou bien *BNB* reste tout entier à l'intérieur du polygone R_m et alors parcourant ce contour on ne sortira pas de ce polygone.

2° Ou bien *BNB* franchit un des côtés C_m de R_m mais sans envelopper un des sommets de ce polygone. Alors en suivant le contour, on sortira d'abord de R_m en franchissant le côté C_m pour entrer dans un nouveau polygone R_{m+1} , puis on sortira de R_{m+1} en franchissant le côté C_m en sens contraire et par conséquent en rentrant dans R_m .

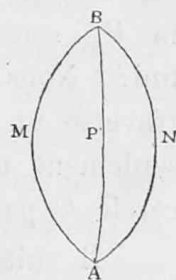
3° Ou bien *BNB* enveloppe un des sommets de R_m . Ce sommet sera forcément de la 1^{ère} catégorie puisqu'il ne pourra être sur X . Ce sommet appartiendra à un cycle comprenant par exemple n sommets et la somme des angles correspondants sera $\frac{2\pi}{p}$. On rencontrera alors en parcourant *BNB* successivement pn polygones $R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+pn}$; la somme des angles en D de tous ces polygones étant 2π , R_{m+pn} se confondra avec R_m .

Donc dans tous les cas possibles, on retombera sur le polygone R_m après avoir parcouru le contour *BNB*. Parcourons maintenant l'arc *AMB* en sens contraire; nous rencontrerons successivement les polygones $R_m, R_{m-1}, \dots, R_1, R_0$, c'est à dire, dans l'ordre inverse, ceux que nous avons rencontrés en parcourant une première fois l'arc *AMB*. Quand nous serons de retour au point A , nous retomberons sur le polygone R_0 . Donc le contour *AMA* sera de la 1^{ère} espèce. C. Q. F. D.

IV. Si deux contours *AMBPA*, *APBNA* sont de la 1^{ère} sorte et de la 1^{ère} espèce, il en sera de même du contour *AMBNA* formé par leur réunion.

En effet si *AMBPA*, *APBNA* sont de la 1^{ère} sorte, c'est que ni *AMB*, ni *ANB* ne sortent de la région recouverte par les polygones R et par conséquent que *AMBNA* est aussi de la 1^{ère} sorte.

Si *AMBPA* est de la 1^{ère} espèce on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc *AMB* ou l'arc *APB*; si *APBNA* est de la 1^{ère} espèce on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc *APB* ou l'arc *ANB*. Donc on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc *AMB* ou l'arc *ANB*. Donc *AMBNA* est de la 1^{ère} espèce. C. Q. F. D.



V. Si un contour AMA est de la 1^{ère} sorte, tout contour ANA qui lui est intérieur est aussi de la 1^{ère} sorte.

En effet si AMA ne coupe pas X , il en sera de même du contour intérieur ANA . C. Q. F. D.

VI. Un contour quelconque AMA de la 1^{ère} sorte est de la 1^{ère} espèce.

En effet ce contour pourra être décomposé en une infinité de contours comme ceux qui sont considérés dans le théorème III. En vertu du théorème V, ces contours sont tous de la 1^{ère} sorte; donc en vertu du théorème III chacun d'eux est de la 1^{ère} espèce, donc en vertu du théorème IV le contour total lui-même AMA est de la 1^{ère} espèce. C. Q. F. D.

L'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est donc démontrée.

Les polygones R transformés de R_0 par les diverses substitutions de ce groupe recouvriront toute la partie du plan située au-dessus de X et ne la recouvriront qu'une fois.

Je suppose maintenant que R_0 admette des cycles de la 4^{me} sous-catégorie.

Les théorèmes I, III et IV seront évidemment encore vrais. Mais il n'en sera pas de même du théorème II. Voyons comment il faudra le modifier dans le cas qui nous occupe.

Reprenons les notations de ce théorème. On démontrera comme plus haut que l'on peut prendre q assez grand pour que tous les arcs λ_p où $p > q$ soient de la 1^{ère} espèce et sous-tendent un même sommet D . Je n'ai rien à ajouter pour le cas où D est de la 1^{ère} ou de la 3^{me} catégorie, ou bien de la 3^{me} sous-catégorie. Supposons maintenant que D soit de la 4^{me} sous-catégorie. Le nombre des arcs λ_p ($p > q$) sera-t-il fini ou infini? Nous avons vu (§ 5) qu'un arc de courbe qui ne coupe pas X traverse un nombre infini des polygones R qui ont un sommet en D ou seulement un nombre fini, selon qu'il coupe ou ne coupe pas un certain cercle C passant par D et ayant son centre sur X .

Il suit de là qu'un arc AMB qui ne coupe pas X peut cependant être de la 2^{me} sorte.

Considérons un arc AMB de la 2^e sorte venant aboutir à un cercle C et supposons qu'il se déforme d'une façon continue, il ne pourra cesser d'être de la 2^{me} sorte qu'en cessant de couper C , comme il est aisé de le comprendre.

Le théorème V est encore vrai, mais il a besoin d'une démonstration nouvelle. Envisageons un contour fermé AMA qui soit de la 1^{ère} sorte et un second contour ANA intérieur au premier; je dis que ce second contour ne peut être de la 2^{de} sorte: en effet s'il en était ainsi, il devrait couper un certain cercle C ; on pourrait passer du contour ANA au contour AMA d'une façon continue, et en variant de la sorte, le contour ANA ne cesserait pas de couper C : il ne cesserait donc pas d'être de la 2^{de} sorte, de manière que AMA devrait être de la 2^{de} sorte, ce que nous n'avons pas supposé.

Le théorème V étant démontré, le théorème VI doit être vrai également et par conséquent *l'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est démontrée.* Les polygones R , transformés de R_0 par les substitutions de ce groupe, recouvrent toute une partie du plan S et ne la recouvrent qu'une fois. Cette région S est tout entière au-dessus de X et elle est limitée par des segments de cet axe et par une infinité de cercles tels que C ayant leurs centres sur X .

Nous avons donc démontré dans tous les cas possibles l'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 ; mais la démonstration peut être considérablement simplifiée dans certains cas particuliers, par exemple quand on n'a pas de sommet de la 1^{ère} catégorie. Dans ce cas, en effet, le polygone R_0 , s'il a $2n$ côtés de la première sorte, divise la partie du plan située au dessus de X en $2n + 1$ régions, à savoir le polygone R_0 lui-même et la région comprise entre l'axe X et chacun des côtés de la 1^{ère} sorte. Considérons un côté C_1 , la région S_1 , comprise entre C_1 et X et le polygone R_1 limitrophe de R_0 le long de C_1 . Le polygone R_1 subdivisera la région S_1 en $2n$ régions plus petites, à savoir le polygone R_1 lui-même et la région comprise entre l'axe X et chacun des côtés de la 1^{ère} sorte restés libres. Quand on aura construit plusieurs polygones R_0, R_1, \dots, R_p , la partie du plan située au dessus de X se trouvera partagée en un certain nombre de régions, à savoir les polygones R_0, R_1, \dots, R_p et les régions S_1, S_2, \dots, S_q comprises entre X et chacun des côtés de la 1^{ère} sorte restés libres. Si l'on cherche à construire un nouveau polygone limitrophe de R_0, R_1, \dots, R_p , il se trouvera tout entier dans une des régions S_1, S_2, \dots, S_q . Il est donc impossible que les polygones ainsi construits se recouvrent mutuellement. L'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est donc démontrée.

§ 7. Principaux exemples.

Avant de donner quelques exemples de ces groupes fuchsien dont je viens de démontrer l'existence d'une manière générale, je vais expliquer une notation dont je me servirai dans la suite pour définir certaines propriétés du polygone R_0 . Je commencerai par désigner chacun des côtés de R_0 par un numéro d'ordre de telle sorte qu'en parcourant le périmètre de ce polygone dans un sens convenable, on rencontre successivement le côté 1, puis le côté 2, etc. Cela fait j'écrirai le numéro d'un des côtés de la 1^{ère} sorte, puis celui de son conjugué, puis une virgule, puis un autre côté de la 1^{ère} sorte, puis son conjugué, puis une virgule etc., puis enfin j'écrirai à la suite les numéros des côtés de la 2^{de} sorte. Par exemple, si R_0 est un octogone dont les côtés de rang impair soient de la 1^{ère} sorte, ceux de rang pair de la 2^e sorte et dont les côtés opposés de la 1^{ère} sorte soient conjugués, je dirai que le polygone R_0 est du système

$$(15, 37, 2468).$$

J'aurai ainsi défini le nombre des côtés de chaque sorte et la distribution des côtés en paires. De cette distribution des côtés en paires, nous déduirons celle des sommets en cycles.

Je vais maintenant étudier quelques exemples, en me servant des notations précédentes.

Exemple I. (14, 23).

Le polygone R_0 est un quadrilatère dont je désigne les sommets par $ABCD$; le côté 1 sera le côté AB ; le côté 2, le côté BC ; le côté 3, le côté CD ; le côté 4, le côté DA . Tous les côtés sont de la 1^{ère} sorte, ce sont donc des arcs de cercle ayant leur centre sur X ; les côtés AB et AD , CB et CD sont conjugués, ils sont donc congruents. Enfin l'angle A est égal à $\frac{2\pi}{\alpha}$, l'angle $B + D$ à $\frac{2\pi}{\beta}$, l'angle C à $\frac{2\pi}{\gamma}$; les nombres α , β , γ étant entiers.

Nous pouvons joindre les deux sommets opposés A et C par un arc de cercle ayant son centre sur X , le quadrilatère R_0 se trouvera ainsi décomposé en deux triangles curvilignes ACD et ABC .

Je voudrais maintenant définir une expression dont je serai quelquefois appelé à me servir dans la suite. Envisageons dans le plan une transformation par rayons vecteurs réciproques; soit O le centre de la transformation et K^2 son paramètre; le cercle C dont le centre est O et le rayon K demeure inaltéré par la transformation. Je dirai que cette transformation est une *réflexion sur le cercle C* et que deux figures transformées réciproques sont *symétriques par rapport à ce cercle*.

Cela posé, il est clair que les deux triangles ACD , ABC sont symétriques par rapport au cercle AC . Il suit de là que les angles curvilignes CAD et CAB , ACD et ACB , ABC et ADC sont égaux, et par conséquent que le triangle ABC a ses trois angles respectivement égaux à $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\beta}$, $\frac{\pi}{\gamma}$.

Soit maintenant R_1 un quadrilatère limitrophe de R_0 le long d'un de ses côtés, de AB par exemple; ces deux polygones seront symétriques par rapport au cercle AB .

Ceci nous conduit, dans le cas particulier qui nous occupe, à une construction très-simple du système des polygones R .

On construira d'abord un triangle ABC dont les trois angles seront respectivement $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\beta}$, $\frac{\pi}{\gamma}$; on peut construire une infinité de pareils triangles mais ils sont tous congruents entre eux; on construira alors les triangles symétriques de ABC par rapport à leurs côtés restés libres et ainsi de suite. On partagera ainsi le plan en une infinité de triangles tous congruents à ABC ou à ACD et en les réunissant deux à deux, on aura partagé le plan en une infinité de quadrilatères congruents à $R_0 = ABCD$.

Qu'arrivera-t-il si l'un des nombres entiers α , β , γ devient infini; supposons par exemple que ce soit γ qui devienne infini; l'angle C qui était égal à $\frac{2\pi}{\gamma}$ deviendra nul; le sommet C cessera d'être de la 1^{ère} catégorie pour devenir de la 3^{me} sous-catégorie. R_0 se composerait encore de deux triangles ABC , ADC symétriques par rapport au cercle AC . Les deux côtés AC et BC sont des arcs de cercle qui sont tangents en un point C situé sur X ; le côté AB est aussi un arc de cercle coupant AC et BC sous des angles $\frac{\pi}{\alpha}$ et $\frac{\pi}{\beta}$.

Supposons en particulier:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

Supposons de plus, pour achever de déterminer le triangle ABC , que les côtés AC et BC se réduisent à deux droites perpendiculaires à X de telle façon que le point C soit rejeté à l'infini; que la droite BC prolongée vienne passer par l'origine 0 ; que la distance des deux parallèles AC et BC soit égale à $\frac{1}{2}$. Le cercle AB aura alors pour centre 0 et pour rayon 1 . On retombera ainsi sur le *Fundamentaldreieck* de M. Klein (*Mathematische Annalen*, Bd. XIV). Le groupe fuchsien correspondant est extrêmement remarquable; il se compose de toutes les substitutions $\left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right)$ telles que a, b, c, d étant entiers, on ait $ad - bc = 1$. C'est la considération de ce groupe et des sous-groupes qui y sont contenus qui est le fondement des recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

Exemple II. (16, 25, 34).

C'est l'exemple I du paragraphe 5. Le polygone R_0 est un hexagone $ABCDEF$ et les sommets forment quatre cycles distincts formés respectivement des sommets A ; BF ; CE ; D ; les angles curvilignes $A, B + F, C + E, D$ doivent être respectivement égaux à $\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\gamma}, \frac{2\pi}{\delta}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des nombres entiers positifs ou infinis.

Un cas particulier intéressant est celui où l'hexagone se décompose en deux quadrilatères $ABCD, ADEF$, symétriques par rapport au cercle AD . Dans ce cas on a pour les angles curvilignes de ces deux quadrilatères les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} BAD = DAF &= \frac{\pi}{a}; & CDA = EDA &= \frac{\pi}{\delta}; \\ B = F &= \frac{\pi}{\beta}; & C = E &= \frac{\pi}{\gamma}. \end{aligned}$$

Pour construire tous les hexagones R , on pourra alors opérer comme dans l'exemple précédent; on construira le quadrilatère $ABCD$, puis les quadrilatères symétriques par rapport à chacun de ses côtés, puis les quadrilatères symétriques de ceux-ci par rapport à chacun de leurs côtés et ainsi de suite.

Considérons maintenant un exemple plus général. Supposons que R_0 soit un polygone de $2n$ côtés de la 1^{ère} sorte dont les sommets soient successivement $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \dots, B_2$. Supposons que les côtés

$A_1 A_2$ et $A_1 B_2$, $A_2 A_3$ et $B_2 B_3$, $A_{n-1} A_n$ et $B_{n-1} B_n$, $A_n A_{n+1}$ et $B_n A_{n+1}$ soient conjugués. Les sommets se répartiront en $n + 1$ cycles:

$$A_1; A_2 B_2; A_3 B_3; \dots; A_{n-1} B_{n-1}; A_n B_n; A_{n+1}$$

et le polygone R_0 s'écrira dans le système de notation adopté:

$$(1.2n, 2.2n-1, 3.2n-2, \dots, n-1.n+2, n.n+1).$$

Dans un certain cas particulier, ce polygone R_0 se divisera en deux moitiés $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n+1}$ et $A_1 B_2 B_3 \dots B_n A_{n+1}$ symétriques par rapport au cercle $A_1 A_{n+1}$. Chacune de ces moitiés est un polygone curviligne dont les côtés ont leurs centres sur X et dont les angles sont des parties aliquotes de π . Pour construire tous les polygones R , il suffit de partir de $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n+1}$, de construire les polygones symétriques de celui-ci par rapport à l'un de ses côtés, puis les polygones symétriques de ceux-ci par rapport à chacun de leurs côtés et ainsi de suite.

On pourrait citer un grand nombre d'autres exemples de polygones générateurs de groupes fuchsien. Parlons seulement des exemples déjà cités au paragraphe 5. Avec le mode de notation adopté les polygones R_0 des exemples II, III, IV et V s'écriraient:

$$(14, 25, 36)$$

$$(15, 26, 37, 48)$$

$$(13, 24, 57, 68)$$

$$(13, 57; 2468).$$

Quelles sont les conditions auxquelles dans ces quatre exemples doit satisfaire le polygone R_0 pour donner naissance à un groupe fuchsien?

Dans les trois premiers exemples les côtés conjugués doivent être congruents. De plus dans l'exemple II, la somme des angles de rang pair, comme celle des angles de rang impair doit être une partie aliquote de 2π ; dans les exemples III et IV c'est la somme de tous les angles qui doit diviser 2π .

Dans l'exemple V, le polygone R_0 n'est assujetti à aucune condition.

§ 8. Classification en Genres.

J'ai fait voir dans ce qui précède comment on pouvait partager la partie du plan qui est au dessus de X en une infinité de polygones curvilignes

R congruents entre eux. Envisageons maintenant la partie du plan qui est au dessous de X , et dans cette partie du plan les polygones curvilignes R'_0, R'_1 , etc. qui sont respectivement symétriques de R_0, R_1 , etc. par rapport à X . Il est clair que si R_i est le transformé de R_0 par une certaine substitution $f_i(z)$ du groupe G , R'_i sera le transformé de R'_0 par cette même substitution. Les substitutions du groupe G qui transforment R_0 en R_1, R_2, \dots transformeront donc de même R'_0 en R'_1, R'_2, \dots . Mais plusieurs cas sont à considérer; si R_0 n'a pas de sommet de la 4^e sous-catégorie, l'ensemble des polygones R et R' recouvre tout le plan; si au contraire, nous avons des sommets de cette sous-catégorie, les polygones R et R' laissent non recouvertes les régions situées à l'intérieur d'une infinité de cercles ayant leurs centres sur X .

Voici une seconde distinction plus importante pour ce qui va suivre. Supposons que le groupe G soit de la 1^{ère}, de la 2^{me} ou de la 6^{me} familles, nous n'aurons ni sommet de la 3^e catégorie, ni côté de la 2^e sorte. Le polygone R_0 n'ayant pas pour côté de segment de X , sera complètement séparé de son symétrique R'_0 ou bien confinera à ce polygone par un sommet seulement (s'il a des sommets de la 2^e catégorie) et non par tout un côté. Supposons au contraire que le groupe G soit de la 3^e, de la 4^e, de la 5^e ou de la 7^e familles, le polygone R_0 aura un ou plusieurs côtés de la 2^e sorte et confinera à son symétrique R'_0 tout le long de ces côtés. Supposons qu'on supprime ces côtés de la 2^e sorte qui servent de frontière commune à R_0 et à R'_0 , on pourra considérer l'ensemble des deux figures $R_0 + R'_0$ comme une seule région qui sera limitée seulement par des arcs de cercle ayant leurs centres sur X , c'est à dire par les côtés de la 1^{ère} sorte de R_0 et ceux de R'_0 . L'ensemble de ces arcs de cercle formera en général plusieurs courbes fermées séparées.

Nous allons maintenant pouvoir parler d'une nouvelle classification des groupes fuchsien. Considérons d'abord un groupe de la 1^{ère}, de la 2^e ou de la 6^{me} familles: le polygone R_0 n'aura pas de côté de la 2^e sorte; par conséquent les points du périmètre de R_0 seront correspondants deux à deux puisque à chaque point d'un côté de la 1^{ère} sorte correspond un point de son conjugué; les points intérieurs à R_0 n'auront aucun correspondant ni dans ce polygone, ni sur son périmètre; enfin tous les sommets d'un même cycle seront correspondants. Supposons qu'on découpe le polygone R_0 , puis qu'on le replie en le déformant d'une manière con-

tinue et de telle façon que les points correspondants de son périmètre viennent se coller l'un contre l'autre; après cette déformation, R_0 sera devenu une surface fermée. Si par exemple on reprend le quadrilatère $ABCD$ de l'exemple I du paragraphe précédent, et qu'après l'avoir découpé, on le replie en le déformant de telle sorte que AB vienne se coller contre AD , puis BC contre CD , R_0 aura pris l'aspect d'une surface fermée convexe.

Considérons maintenant un quadrilatère $ABCD$ du système (13, 24) de telle sorte que AB soit conjugué de CD et AC de BD . Replions le quadrilatère de façon à coller AB contre CD , il prendra l'aspect d'une sorte de cylindre ouvert par les deux bouts, les côtés AC et BD étant restés libres, mais étant devenus des courbes fermées; si on colle ensuite AC contre BD , le quadrilatère prendra l'aspect d'une sorte d'anneau fermé.

On sait que les surfaces fermées sont susceptibles d'être classées en genres de la manière suivante. Sur une sphère, par exemple, on ne peut tracer un cycle fermé sans subdiviser la surface de la sphère en deux régions distinctes; il n'en est pas de même sur un tore dont un cercle méridien, par exemple, ne subdivise pas la surface en deux régions distinctes; mais on ne pourrait tracer sur le tore deux cycles fermés séparés sans obtenir une semblable subdivision.

Le genre d'une surface fermée est alors le nombre maximum des cycles fermés séparés que l'on peut tracer sur la surface sans la subdiviser en deux régions distinctes. Ainsi une surface fermée dans laquelle on aurait percé p trous serait de genre p .

Le genre d'un groupe fuchsien sera le genre de la surface fermée, obtenue comme il vient d'être dit par la déformation de R_0 .

Comment obtenir l'expression de ce genre?

Supposons qu'on ait subdivisé une surface de genre p en F polygones curvilignes, que le nombre total des côtés soit A et celui des sommets S , on aura la relation

$$F + S - A = -2p + 2.$$

Reprenons le polygone R_0 ; soit $2n$ le nombre de ses côtés de la 1^{ère} sorte, et q celui des cycles fermés. Après la déformation, les côtés étant venus se coller l'un contre l'autre deux à deux, le nombre des côtés distincts restants sera n ; de même le nombre des sommets distincts restants sera q .

On aura donc:

$$F = 1 \quad A = n \quad S = q$$

d'où

$$q + 1 - n = 2 - 2p$$

ou

$$p = \frac{n + 1 - q}{2}.$$

Reprenons les exemples I et II du paragraphe précédent; nous aurons:

$$q = n + 1$$

d'où

$$p = 0.$$

Je vais donner une autre application de la règle qui précède.

Supposons que le polygone R_0 ait $2n$ côtés de la 1^{ère} sorte et de telle façon que les côtés opposés soient conjugués. Pour trouver le genre du groupe fuchsien correspondant, il faut chercher le nombre des cycles entre lesquels se répartissent les $2n$ sommets. En appliquant la règle du § 5, on trouve que tous les sommets appartiennent à un même cycle si n est pair, et que si n est impair, on a deux cycles formés, l'un de tous les sommets de rang pair, l'autre de tous les sommets de rang impair. On a donc:

$$q = 1 \text{ ou } 2$$

selon que n est pair ou impair, et par conséquent:

$$p = \frac{n}{2}$$

si n est pair, et

$$p = \frac{n + 1}{2}$$

si n est impair.

Supposons maintenant que le polygone R_0 admette des côtés de la 2^e sorte; il sera contigu tout le long de ces côtés à R'_0 , de sorte que la région $R_0 + R'_0$ sera d'une seule pièce; les points situés à l'intérieur de cette région ne pourront être correspondants à aucun autre point de la région; les points du périmètre, qui appartiendront tous à des côtés de la 1^{ère} sorte de R_0 ou de R'_0 , seront correspondants deux à deux; enfin les sommets d'un même cycle seront des points correspondants. Découpons

maintenant la région $R_0 + R'_0$ et replions-la en la déformant de telle façon que les points correspondants de son périmètre viennent se coller l'un contre l'autre. Le genre du groupe fuchsien sera par définition celui de la surface fermée ainsi obtenue.

Soit encore $2n$ le nombre des côtés de la 1^{ère} sorte de R_0 , q celui de ses cycles fermés; R'_0 aura de même $2n$ côtés de la 1^{ère} sorte et q cycles fermés. Supposons que nous ayons h côtés de la 2^e sorte et par conséquent h cycles ouverts qui seront communs à R_0 et à R'_0 .

Reprenons la formule:

$$F + S - A = 2 - 2p.$$

Nous aurons $F = 2$, car nous avons deux polygones R_0 et R'_0 ; nous aurons $A = 2n + h$, car nous avons n paires de côtés de la 1^{ère} sorte provenant de R_0 , n paires de côtés de la 1^{ère} sorte provenant de R'_0 et h côtés de la 2^e sorte; enfin on aura $S = 2q + h$, puisque nous avons en tout $2q$ cycles fermés et h cycles ouverts.

Il vient donc:

$$p = n - q.$$

Supposons par exemple que R_0 soit de la 3^e famille, c'est à dire que tous ses sommets soient de la 3^e catégorie. On a alors:

$$q = 0 \quad p = n.$$

Ainsi dans l'exemple V du § 5, le genre est égal à 2. Comme second exemple, je prends un polygone R_0 dont la distribution des côtés est donnée par la formule suivante:

$$(15, 24; 3)$$

ou plus généralement:

$$(1.2n + 1, 2.2n, 3.2n - 1, \dots, n.n + 2; n + 1)$$

de telle sorte que le $n + 1$ ^e côté soit seul de la 2^e sorte et que les côtés d'ordre m et $2n + 2 - m$ soient conjugués.

On aura dans ce cas:

$$q = n$$

d'où

$$p = 0.$$

§ 9. Simplification du Polygone Générateur.

Nous avons vu au commencement du § 5 que les régions R_0 ne sont pas complètement définies par cette condition que chacune d'elles ne contient qu'un seul point correspondant à un point z donné. Nous avons ensuite imposé à ces régions une condition de plus, celle de se réduire à des polygones curvilignes ayant pour côtés des arcs de cercle et des segments de X . Mais les régions R_0 (ou *polygones générateurs*) ne sont pas encore par là complètement déterminées. En effet nous avons vu qu'on pouvait ajouter à R_0 une région quelconque S_0 à la condition d'en retrancher une région S_p transformée de S_0 par une des substitutions du groupe fuchsien, et que la région ainsi obtenue $R_0 + S_0 - S_p$ pouvait servir de la même façon que R_0 à engendrer ce groupe. Si les régions R_0 , S_0 et S_p sont contiguës et si elles se réduisent toutes trois à des polygones normaux, c'est à dire dont les côtés sont des segments de X ou des arcs de cercle ayant leurs centres sur X , la région résultante $R_0 + S_0 - S_p$ est également un polygone normal. Il suit de là qu'un même groupe fuchsien peut être engendré par une infinité de polygones générateurs R_0 et qu'on peut profiter de cette indétermination pour simplifier ce polygone.

Voici comment peut s'effectuer une pareille simplification. Joignons deux points A et B du périmètre de R_0 par un arc de cercle ayant son centre sur X , de façon à diviser ce polygone en deux autres S_0 et T_0 ; considérons deux côtés conjugués CD et EF de R_0 et supposons que CD appartienne tout entier au périmètre de S_0 et EF à celui de T_0 . Soit R_1 le polygone qui est limitrophe de R_0 le long de EF et supposons-le décomposé en deux polygones S_1 et T_1 respectivement congruents à S_0 et T_0 . Le polygone $R'_0 = S_1 + T_0$ pourra servir, aussi bien que R_0 , de polygone générateur pour le groupe fuchsien G . Il peut se faire que la considération de R'_0 soit plus avantageuse que celle de R_0 , ou bien encore qu'en faisant sur R'_0 une opération analogue à celle qu'on vient de faire sur R_0 , on arrive à un polygone R''_0 plus simple que les deux autres.

Dans chaque cas particulier, on se laissera guider par les circonstances du problème, aussi ne veux-je pas insister plus longuement sur ce point. Je me bornerai à quelques exemples, en reprenant les notations du § 7.

1° Un polygone R_0 du système (16, 23, 45) peut toujours être ramené à un polygone du système (16, 25, 34).

2° Un polygone du système (12, 34, 56, 78) peut toujours être ramené à un polygone du système (18, 27, 36, 45).

3° Un octogone du système (13, 24, 57, 68) peut toujours être ramené à un octogone du système (15, 26, 37, 48).

Quelles sont, dans cette transformation des polygones curvilignes R_0 , les propriétés de ce polygone qui demeurent invariables?

1° La famille du polygone R_0 ne change pas, sauf une exception dont je parlerai plus loin.

2° Son genre ne change pas non plus.

3° Le nombre des cycles fermés de la 3^e sous-catégorie ne varie pas.

4° Il en est de même du nombre des cycles fermés de la 4^{ème} sous-catégorie.

5° Le nombre des cycles fermés de la 2^e sous-catégorie ne varie pas non plus. On a vu que la somme des angles correspondants aux divers sommets d'un pareil cycle était égale à $\frac{2\pi}{p}$, p étant un nombre entier supérieur à l'unité. La valeur de ce nombre p demeure également invariable.

6° On peut au contraire en général augmenter ou diminuer à volonté le nombre des cycles fermés de la 1^{ère} sous-catégorie qui sont tels que la somme des angles qui correspondent à tous les sommets du cycle est égale à 2π .

§ 10. Isomorphisme.

Nous avons vu au commencement du § 3 qu'un groupe fuchsien H est isomorphe à un autre groupe fuchsien G si le nombre des substitutions fondamentales est le même et si de plus toutes les relations de la forme [(6) § 3] qui existent entre les substitutions de G , subsistent entre celles de H . Pour reconnaître l'isomorphisme de deux groupes donnés, nous sommes donc amenés à chercher les relations de la forme [(6) § 3] qui existent entre les substitutions d'un groupe donné et en particulier les *relations fondamentales* dont toutes les autres ne sont que des combinaisons.

Nous avons vu au § 3 qu'on obtenait les relations de la forme (6) de la manière suivante: on décrit à partir d'un point A intérieur à R_0

un contour fermé quelconque AMA ne sortant pas de la région du plan située au dessus de X . Supposons que ce contour traverse successivement des régions $R_0, R_{\alpha_1}, R_{\beta_2}, \dots, R_{\beta_{x-1}}$ et enfin une région R_{β_x} se confondant avec R_0 , qu'il passe de la région $R_{\beta_{x-1}}$ dans la région R_{β_x} en franchissant un côté de $R_{\beta_{x-1}}$ qui est l'homologue de celui des côtés de R_0 qui sert de frontière commune à cette région et à R_{α_x} . Nous pourrons écrire la relation identique:

$$z = f_{a_1} [f_{a_2} (f_{a_3} \dots (f_{a_x} (z)) \dots)]$$

qui est de la forme (6) et on obtiendra de la sorte toutes les relations de cette forme. Mais si on ne veut écrire que les relations fondamentales, il ne sera pas nécessaire de décrire tous les contours AMA possibles; on se bornera aux contours infiniment petits qui enveloppent les sommets de R_0 . Envisageons donc successivement les divers sommets de R_0 et décrivons autour de chacun d'eux un contour infinitésimal. Comme ce contour AMA ne devra pas sortir de la partie du plan située au dessus de X , on ne pourra décrire de semblable contour autour des sommets de R_0 qui sont situés sur cet axe X lui-même. Les seuls sommets du polygone R_0 que nous ayons à envisager sont donc des sommets de la 1^{ère} catégorie.

Je suppose que les différents côtés de R_0 soient numérotés de telle sorte qu'en suivant dans un sens convenable le périmètre de ce polygone on rencontre successivement les côtés $C_1, C_2, C_3, \dots, C_q$; q étant le nombre total des côtés; A_1 sera le sommet situé entre C_q et C_1 ; A_2 le sommet situé entre C_1 et C_2 ; etc. En général A_i sera le sommet situé entre C_{i-1} et C_i . Si C_i est de la 1^{ère} sorte, la région limitrophe de R_0 le long de C_i s'appellera R_i et la substitution fondamentale correspondante sera:

$$[z, f_i(z)].$$

Considérons l'un quelconque des sommets de la 1^{ère} catégorie que j'appelle A_{a_1} . Ce sommet fera partie d'un certain cycle de la 1^{ère} catégorie; on trouvera les autres sommets de ce cycle en appliquant la règle du § 5. Supposons que cette règle donne successivement les sommets:

$$A_{a_1} A_{a_2} \dots A_{a_p}$$

et précisément dans cet ordre. Supposons que la somme des angles corre-

spondants à ces sommets soit $\frac{2\pi}{\lambda}$, λ sera un nombre entier. Posons pour abrégé :

$$\begin{aligned} F(z) &= f_{a_1} [f_{a_2} [f_{a_3} \dots \dots [f_{a_p}(z)] \dots \dots]] \\ F[F(z)] &= F^2(z) \quad F[F^2(z)] = F^3(z) \dots \dots \\ F[F^{\lambda-1}(z)] &= F^\lambda(z). \end{aligned}$$

La relation fondamentale à laquelle conduira, d'après la règle exposée plus haut, un contour infinitésimal décrit autour de A_{a_1} sera :

$$z = F^\lambda(z).$$

Les sommets $A_{a_2}, A_{a_3} \dots \dots A_{a_p}$ qui appartiennent au même cycle que A_{a_1} conduisent à la même relation. Donc :

Le nombre des relations fondamentales qui existent entre les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien G , est précisément celui des cycles de la 1^{ère} catégorie du polygone R_0 correspondant.

Or les polygones des 2^e, 3^e et 4^e familles n'admettent pas de cycle de cette catégorie. Donc il n'y a aucune relation fondamentale entre les substitutions des groupes de ces familles, et les relations de la forme (6) que l'on pourrait trouver entre ces substitutions se réduisent toutes à des identités.

Voici une première conséquence que l'on peut tirer de ce fait: *tout groupe H dérivé de n substitutions fondamentales est isomorphe à un groupe fuchsien G de la 2^e, de la 3^e ou de la 4^e familles, pourvu que ce groupe soit également dérivé de n substitutions fondamentales.* En effet la première condition de l'isomorphisme qui exige que le nombre des substitutions fondamentales soit le même est remplie, et la seconde qui exige que toute relation entre les substitutions de G subsiste entre celles de H est satisfaite d'elle-même puisqu'il n'existe pas de pareille relation. Seulement une distinction est à faire. S'il y a des relations de la forme (6) entre les substitutions de H , G n'est pas isomorphe à H et par conséquent l'isomorphisme est méridrique. Si au contraire il n'y a pas de semblable relation, l'isomorphisme est réciproque et par conséquent holoédrique. Il en résulte que *deux groupes fuchsien de la 2^e, de la 3^e ou de la 4^{me} familles sont holoédriquement isomorphes pourvu que le nombre des substitutions fondamentales soit le même, c'est à dire pourvu que les deux polygones R_0 correspondants aient un même nombre de côtés de la 1^{ère} sorte.*

Considérons maintenant deux polygones R_0 et R'_0 quelconques, mais dont les côtés de la 1^{ère} et de la 2^e sorte soient distribués de la même manière, de telle sorte qu'ils soient désignés par la même formule, si on emploie la notation exposée au commencement du § 7. Ces deux polygones appartiendront évidemment au même genre et à la même famille et le nombre de cycles, formés par les sommets des deux polygones, est le même, de telle façon qu'à chaque cycle de R_0 corresponde un cycle de R'_0 et réciproquement. D'ailleurs, à un cycle fermé du premier polygone, correspondra dans le second polygone un cycle également fermé. Si de plus la somme des angles de chaque cycle fermé de R_0 est la même que la somme des angles du cycle correspondant de R'_0 , les deux groupes fuchsien engendrés par ces deux polygones seront holoédriquement isomorphes.

§ 11. Formation effective des Groupes Fuchsien.

Un groupe fuchsien est complètement déterminé quand on connaît ses substitutions fondamentales, qu'il suffit de combiner de toutes les manières possibles pour obtenir toutes les substitutions du groupe. Former un groupe fuchsien, c'est donc calculer les coefficients de ses substitutions fondamentales. Ce problème ne présente aucune difficulté. Supposons en effet que l'on ait construit le polygone R_0 correspondant au groupe à former et que l'on ait calculé les coordonnées et par conséquent les affixes de tous ses sommets. Les substitutions fondamentales cherchées sont celles qui changent chaque côté de la 1^{ère} sorte en son conjugué. Soit donc α, β et γ, δ les affixes des sommets de deux côtés conjugués de R_0 . Supposons d'abord que les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soient toutes quatre imaginaires, de telle façon qu'aucun de ces sommets ne soit situé sur X . On devra avoir en appelant $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ les quantités imaginaires conjuguées de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$$

c'est à dire

$$(1) \quad \frac{\alpha - \alpha' \beta - \beta'}{\alpha - \beta' \beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma' \delta - \delta'}{\gamma - \delta' \delta - \gamma'}$$

La substitution réelle qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ est alors parfaitement déterminée; pour l'écrire en mettant en évidence la réalité des coefficients, je poserai:

$$\begin{aligned} a &= a_1 + ia_2 & \beta &= \beta_1 + i\beta_2 & \gamma &= \gamma_1 + i\gamma_2 & \delta &= \delta_1 + i\delta_2 \\ a' &= a_1 - ia_2 & \beta' &= \beta_1 - i\beta_2 & \gamma' &= \gamma_1 - i\gamma_2 & \delta' &= \delta_1 - i\delta_2. \end{aligned}$$

La substitution cherchée s'écrira alors:

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D} \right)$$

où:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} a_1 \gamma_1 - a_2 \gamma_2 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_1 - \beta_2 \delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_2 + \beta_2 \delta_1 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix} & B &= \begin{vmatrix} a_1 \gamma_1 - a_2 \gamma_2 & a_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 \delta_1 - \beta_2 \delta_2 & \beta_1 & \gamma_2 \\ \beta_1 \delta_2 + \beta_2 \delta_1 & \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix} \\ C &= \begin{vmatrix} a_1 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1 & \delta_1 & 1 \\ \beta_2 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix} & D &= \begin{vmatrix} a_1 \gamma_1 - a_2 \gamma_2 & a_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_1 - \beta_2 \delta_2 & \beta_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_2 + \beta_2 \delta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Mais on peut faire encore deux hypothèses; supposons que α et γ soient réels tandis que β et δ restent imaginaires; la condition (1) n'a plus alors de raison d'être; la substitution réelle qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ est encore parfaitement déterminée et elle s'écrit

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D} \right);$$

les coefficients A, B, C, D ont la même expression que plus haut, mais il faut remarquer que α_2 et γ_2 sont nuls.

Supposons maintenant que les quatre quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soient réelles, la substitution qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ ne sera plus déterminée. Dans l'expression de ses coefficients entrera un paramètre arbitraire h . Elle s'écrira

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D} \right)$$

et les coefficients A, B, C, D auront pour expression:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} a\gamma & \gamma & 1 \\ \beta\delta & \delta & 1 \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} & B &= \begin{vmatrix} a\gamma & a & \gamma \\ \beta\delta & \beta & \delta \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ C &= \begin{vmatrix} a & \gamma & 1 \\ \beta & \delta & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & D &= \begin{vmatrix} a\gamma & a & 1 \\ \beta\delta & \beta & 1 \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Les quantités réelles α , β , γ , δ pour pouvoir être les sommets d'un polygone R_0 sont assujetties à l'inégalité:

$$\left[\frac{1}{\delta - \alpha} - \frac{1}{\gamma - \alpha} \right] \left[\frac{1}{\delta - \alpha} - \frac{1}{\beta - \alpha} \right] < 0.$$

Quant à h , c'est un paramètre arbitraire qui est supposé réel et assujetti à l'inégalité:

$$(\gamma + h)(\delta + h)(\delta - \gamma)(\beta - \alpha) > 0.$$

Ainsi quand on connaît les affixes des sommets de R_0 qui exprime que le déterminant $AD-BC$ est positif, on peut calculer les coefficients des substitutions fondamentales de G . Il s'agit donc de choisir ces affixes de telle façon que le polygone R_0 satisfasse aux conditions du § 6 qui sont nécessaires pour qu'il donne naissance à un groupe fuchsien. C'est là un problème purement algébrique et qui ne présente aucune difficulté. La grande variété des cas possibles ne me permettra pas de les examiner tous en détail ce qui m'entraînerait à des répétitions et à des longueurs inutiles. Je me bornerai donc à envisager quelques exemples.

1^{er} EXEMPLE.

Cherchons d'abord à former les groupes fuchsien de la 3^{me} famille dérivés de n substitutions fondamentales. Le polygone R_0 correspondant aura $2n$ côtés de la 1^{ère} sorte et $2n$ de la 2^{me}. Pour déterminer complètement un pareil polygone, il faut s'imposer arbitrairement $4n$ conditions. Mais nous avons vu au § 9 qu'un même groupe G peut être engendré par une infinité de polygones R_0 . Si l'on tient compte de cette circonstance, on reconnaîtra aisément que pour déterminer complètement le groupe de la 3^{me} famille dérivé de n substitutions fondamentales, il faut s'imposer arbitrairement $3n$ conditions. Or c'est là précisément le nombre total des coefficients de n substitutions réelles quelconques. Il ne s'en suit pas qu'il suffise de prendre au hasard n substitutions réelles pour que le groupe qui en dérive soit un groupe fuchsien de la 3^{me} famille; mais *les coefficients de ces substitutions ne seront assujettis à aucune condition d'égalité; ils devront seulement satisfaire à certaines inégalités.*

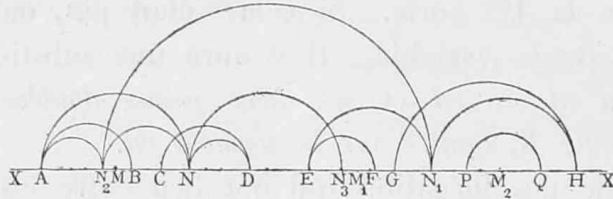
Quelles sont ces inégalités? tel est le problème qu'il nous reste à résoudre. On trouve d'abord sans peine que toutes les substitutions doivent être hyperboliques et par conséquent leurs points doubles doivent

être réels et situés sur X . On peut énoncer un résultat général au sujet de la distribution de ces points doubles sur X . En effet, considérons deux côtés conjugués ab et cd de R_0 et supposons qu'ils soient de la 1^{ère} sorte et appartiennent à la même paire. Supposons de plus pour fixer les idées que le point ∞ fasse partie de R_0 de telle façon que ce polygone soit la région du plan située au dessus de X et extérieure aux différents cercles qui forment ses côtés de la 1^{ère} sorte. Si cela n'était pas, on ferait un changement convenable de la variable. Il y aura une substitution fondamentale qui changera ab en cd et ses deux points doubles seront situés l'un sur le segment ab de X , l'autre sur le segment cd .

Pour pousser plus loin l'étude des inégalités qui ont lieu entre les coefficients des substitutions fondamentales d'un groupe de la 3^{me} famille, je vais prendre un exemple particulier, à savoir l'octogone de l'exemple V du § 5. La méthode que j'emploierai s'étendrait d'ailleurs au cas le plus général.

Les deux substitutions fondamentales changent AB en DC et EF en HG . Considérons d'abord la substitution S qui change AB en DC ; ses deux points doubles M et N sont situés respectivement sur les segments AB et CD de l'axe X . Décrivons un cercle sur AN comme diamètre, et envisageons le triangle curviligne ABN ; envisageons également le cercle décrit sur DN comme diamètre et le triangle curviligne DCN ; la substitution S changera le triangle ABN en DCN ; nous pouvons donc en vertu des principes du § 9 remplacer l'octogone $R_0 = ABCDEFGH$ par l'heptagone $R'_0 = ANDEFGH$. Envisageons de même la substitution S_1 qui change EF en HG et ses deux points doubles M_1 et N_1 situés l'un sur le segment EF , l'autre sur le segment GH . Par un raisonnement tout semblable à celui qui précède, on verrait que l'on peut remplacer l'heptagone R'_0 par l'hexagone $R''_0 = ANDEN_1H$. Remarquons que R''_0 est de la 4^e famille et du 2^{me} ordre de cette famille, tandis que R_0 était de la 3^{me} famille. C'est là l'exception que j'avais annoncée aux principes du § 9; on peut simplifier le polygone générateur R_0 de façon à ramener un polygone de la 3^{me} à un polygone du 2^{me} ordre de la 4^{me} ou même de la 2^{me} familles; mais jamais à un polygone du 1^{er} ordre de la 4^{me} ou de la 2^{me} familles. Envisageons maintenant l'opération S_2 qui consiste à faire d'abord la substitution S , puis la substitution inverse de S_1 . La substitution S change AN en DN , et la substitution inverse de S_1 change

DN en un certain cercle PQ intérieur à $N_1 H$. La substitution S_2 change donc AN en PQ et ses deux points doubles N_2 et M_2 sont situés, l'un sur le segment AN , l'autre sur le segment PQ . La substitution S change N_2 en un certain point N_3 ; la substitution S_1 devra changer aussi N_2 en N_3 ; N_3 est donc situé sur le segment $N_1 E$. Décrivons des cercles sur $N_2 N$,



$N_2 N_1$, $N_1 N_3$, NN_3 comme diamètres; la substitution S change $N_2 N$ en $N_3 N$, $N_2 N_1$ en $N_3 N_1$ et cela nous permet en vertu des principes du § 9 de remplacer l'octogone R_0 par le quadrilatère $R_0'' = N_1 N_2 N N_3$.

Ce quadrilatère est de la 2^{me} famille et du 2^{me} ordre de cette famille.

Nous allons maintenant pouvoir trouver les inégalités qui ont lieu entre les coefficients de S et de S_1 ; on peut toujours supposer que les points doubles de S_1 sont 0 et ∞ de telle sorte que

$$N_1 = 0 \quad M_1 = \infty$$

car si cette condition n'était pas remplie, il suffirait d'un changement très simple de variable pour être ramené au cas où l'on a $N_1 = 0$, $M_1 = \infty$.

Les deux substitutions s'écrivent alors:

$$S = \left(z, \frac{az + b}{cz + d} \right) \quad S_1 = (z, Kz).$$

K est essentiellement positif et plus grand que 1. De plus on peut toujours supposer que c est positif sans quoi on changerait tous les signes des quatre quantités a , b , c , d . Les points M et N sont les points doubles de S et par conséquent les racines de l'équation:

$$(1) \quad cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Les points M_2 et N_2 sont les points doubles de la substitution

$$\left(z, \frac{az + b}{K(cz + d)} \right)$$

ou les racines de l'équation:

$$(2) \quad cz^2 + \left(d - \frac{a}{K} \right) z - \frac{b}{K} = 0.$$

Le point N_3 et un autre point M_3 sont les points doubles de la substitution

$$\left(z, \frac{az + bK}{cz + dK} \right)$$

et les racines de l'équation:

$$(3) \quad cz^2 + (dK - a)z - bK = 0.$$

L'inspection de la figure montre que les quantités M, N, M_2, N_2, M_3, N_3 sont toutes réelles et de même signe; positives par exemple; d'où les relations:

$$\begin{array}{lll} b < 0 & (d - a)^2 + 4bc > 0 & a > d \\ \frac{b}{K} < 0 & (dK - a)^2 + 4Kbc > 0 & a > dK \\ bK < 0 & (dK - a)^2 + 4Kbc > 0 & a > dK \end{array}$$

qui se réduisent à:

$$\begin{array}{llll} b < 0 & a > dK & (a + d)^2 > 4 & a > d \\ & & \left(\frac{a}{\sqrt{K}} + d\sqrt{K} \right)^2 > 4 & \end{array}$$

en tenant compte de

$$ad - bc = 1.$$

Exprimons maintenant que M_2 et N_2 sont plus petits et que M_3 et N_3 sont plus grands que M et N . On trouve ainsi les conditions:

$$\begin{array}{ll} b < 0 & a^2 + bc > 1 > d^2 + bc \\ b < 0 & \frac{a^2}{K} + bc < 1 < d^2 K + bc \quad a - dK > a - d > \frac{a}{K} - d. \end{array}$$

Toutes ces conditions se réduisent aux suivantes:

$$\begin{array}{llll} a > 0 & b < 0 & d < 0 & a + d > 2 \\ & & & \frac{a}{\sqrt{K}} + d\sqrt{K} < -2 \end{array}$$

Cette méthode s'applique à tous les groupes fuchsien de la 3^{me} famille. On peut toujours par ce procédé ramener le polygone R_0 à un polygone du 2^e ordre de la 2^{me} famille. Les sommets de ce nouveau polygone seront connus car ce seront les points doubles des substitutions fondamentales ou de quelques-unes de leurs combinaisons. Pour trouver les inégalités cherchées, il suffit d'exprimer que ces sommets sont disposés d'une certaine manière.

2^{me} EXEMPLE.

Nous prendrons pour deuxième exemple les groupes de la 1^{ère} famille et du genre 0 et, pour particulariser encore, nous choisirons l'hexagone $ABCDEF$ de l'exemple II du § 7.

Nous avons ici trois substitutions fondamentales:

S_1 qui change AB en AF

S_2 qui change BC en FE

S_3 qui change CD en ED .

Nous envisagerons en outre:

S_4 combinaison de S_2 et de S_1 pris en sens contraire

S_5 combinaison de S_3 et de S_2 pris en sens contraire.

On peut considérer le groupe comme dérivé de S_1, S_4 et S_5 .

Soient a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D ; a', b', c', d' leurs quantités imaginaires conjuguées; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les angles $A, B + F, C + E, D$ qui sont des parties aliquotes de 2π . Les substitutions S_1, S_4, S_5 et S_3 s'écriront:

$$\begin{array}{ll} \left(\frac{z-a}{z-a'}, e^{i\alpha} \frac{z-a}{z-a'} \right) & \left(\frac{z-b}{z-b'}, e^{i\beta} \frac{z-b}{z-b'} \right) \\ \left(\frac{z-c}{z-c'}, e^{i\gamma} \frac{z-c}{z-c'} \right) & \left(\frac{z-d}{z-d'}, e^{i\delta} \frac{z-d}{z-d'} \right). \end{array}$$

Exprimons que la combinaison des quatre substitutions S_3, S_5, S_4, S_1 faites successivement équivaut à la substitution identique (z, z) ; nous arriverons à trois relations entre $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Supposons ces relations satisfaites. Suffiront-elles pour que le groupe dérivé des substitutions S_1, S_5, S_4 soit discontinu? Non, il faudra encore que les points A, B, C, D puissent former quatre sommets d'un hexagone $ABCDEF$ où les angles:

$$A = \alpha \quad B + F = \beta \quad C + E = \gamma \quad D = \delta.$$

Considérons les angles curvilignes du quadrilatère $ABCD$ obtenu en joignant les quatre points A, B, C, D par des arcs de cercle ayant leurs centres sur X . Il faut que les quatre angles A, B, C, D de ce quadrilatère soient respectivement plus petits que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; d'où les inégalités:

$$(2) \quad \begin{aligned} 0 < \arg. \frac{d-a}{d'-a'} \frac{b'-a'}{b-a} < \alpha \\ 0 < \arg. \frac{a-b}{a'-b'} \frac{c'-b'}{c-b} < \beta \\ 0 < \arg. \frac{b-c}{b'-c'} \frac{d'-c'}{d-c} < \gamma \\ 0 < \arg. \frac{c-d}{c'-d'} \frac{a'-d'}{a-d} < \delta. \end{aligned}$$

Comment reconnaitrons-nous maintenant si trois substitutions données S_1 , S_4 , S_5 peuvent être considérées comme les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien analogue à celui qui nous occupe. On formera la substitution S_3 , combinaison de la substitution inverse de S_1 , de l'inverse de S_4 , et de l'inverse de S_5 faites successivement. On calculera les points doubles $a, a'; b, b'; c, c'; d, d'$ de ces quatre substitutions et leurs multiplicateurs $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$. Deux conditions devront être remplies: 1^o $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ devront être parties aliquotes de 2π ; 2^o les quantités $a, a', b, b', c, c', d, d', \alpha, \beta, \gamma, \delta$ devront satisfaire aux inégalités (2).

3^e EXEMPLE.

Nous prendrons pour troisième exemple les groupes de la 2^e famille, du 1^{er} ordre et du genre 0; et parmi ces groupes, nous choisirons encore celui qui est engendré par l'hexagone $R_0 = ABCDEF$ considéré dans l'exemple II du § 7. Seulement ici cet hexagone devant être de la 2^e famille, tous ses sommets seront sur X . Nous envisagerons, comme dans l'exemple précédent, les substitutions:

- S_1 qui change AB en AF
- S_2 qui change BC en FE
- S_3 qui change DC en DE
- S_4 combinaison de S_2 et de l'inverse de S_1
- S_5 combinaison de S_3 et de l'inverse de S_2 .

Soient a, b, c, d, e, f les affixes des sommets de R_0 ; ces quantités seront essentiellement réelles. Les substitutions S_1, S_4, S_5 et S_3 devront être paraboliques puisque le groupe est supposé du 1^{er} ordre, et elles s'écriront:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \left(\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a} \right) \\
 S_4 &= \left(\frac{1}{z-b}, \frac{1}{z-b} + \frac{1}{h-b} - \frac{1}{c-b} \right) \\
 S_5 &= \left(\frac{1}{z-c}, \frac{1}{z-c} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{k-c} \right) \\
 S_3 &= \left(\frac{1}{z-d}, \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d} \right)
 \end{aligned}$$

où h et k sont deux quantités définies par les équations

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{e-a} &= \frac{1}{h-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a} \\
 \frac{1}{f-d} &= \frac{1}{k-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}.
 \end{aligned}$$

Quelles sont maintenant les conditions pour que les trois substitutions S_1 , S_4 , S_5 donnent naissance à un groupe fuchsien? Il faut que les six quantités a, b, c, d, e, f se succèdent précisément dans cet ordre circulaire, ou bien dans l'ordre inverse de sorte qu'on doit avoir:

$$(3) \quad \frac{1}{b-a} < \frac{1}{c-a} < \frac{1}{d-a} < \frac{1}{e-a} < \frac{1}{f-a}$$

ou bien

$$\frac{1}{b-a} > \frac{1}{c-a} > \frac{1}{d-a} > \frac{1}{e-a} > \frac{1}{f-a}.$$

Exprimons maintenant que la combinaison des substitutions S_3, S_5, S_4, S_1 équivaut à la substitution identique, il viendra:

$$(4) \quad (b-a)(d-c)(f-e) = (c-b)(e-d)(a-f).$$

REMARQUE.

Dans les deux exemples qui précèdent, il est peut-être avantageux d'envisager, non l'hexagone $ABCDEF$ de l'exemple II du § 7, qui serait noté (16, 25, 34), mais l'hexagone noté (12, 34, 56) qui lui est équivalent d'après ce qu'on a vu au § 9.

Soit $ABCDEF$ cet hexagone, les côtés AB et BC , CD et DE , EF et FA seront conjugués. Envisageons les substitutions:

- S_1 qui change BA en BC
 S_2 qui change DC en DE
 S_3 qui change FE en FA
 S_4 combinaison de S_1, S_2 et S_3 .

Ces quatre substitutions seront elliptiques et leurs multiplicateurs seront $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des parties aliquotes de 2π .

B sera l'un des points doubles de S_1 , D l'un des points doubles de S_2 , F l'un des points doubles de S_3 , A l'un des points doubles de S_4 ; quant aux autres points doubles de ces substitutions, ce seront respectivement les quantités imaginaires conjuguées de B, D, F, A ; C sera le transformé de A par S_1 , E celui de C par S_2 . Pour que le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 soit discontinu, il suffit que l'hexagone curviligne normal $ABCDEF$ soit convexe; d'où les conditions:

$$(5) \quad \begin{aligned} \arg. \frac{d-b}{d'-b'} \frac{f'-b'}{f-b} &< \alpha \\ \arg. \frac{f-d}{f'-d'} \frac{b'-d'}{b-d} &< \beta \\ \arg. \frac{b-f}{b'-f'} \frac{d'-f'}{d-f} &< \gamma. \end{aligned}$$

Pour reconnaître si le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 est discontinu, on calculera les points doubles $a, a', b, b', c, c', d, d'$, et les multiplicateurs $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$ de S_1, S_2, S_3 et de leur combinaison S_4 et on recherchera si ces quantités satisfont aux inégalités (5) et si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des parties aliquotes de 2π .

Supposons maintenant que l'hexagone $abcdef$ ne soit plus de la 1^{ère}, mais de la 2^e famille et du 1^{er} ordre de cette famille, de telle façon que les quantités $abcdef$ soient réelles. Ces quantités devront satisfaire aux inégalités (3), pour que l'hexagone $abcdef$ soit convexe. Les substitutions S_1, S_2, S_3 s'écriront:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(\frac{1}{z-b}, \frac{1}{z-b} + \frac{1}{c-b} - \frac{1}{a-b} \right) \\ S_2 &= \left(\frac{1}{z-d}, \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d} \right) \\ S_3 &= \left(\frac{1}{z-f}, \frac{1}{z-f} + \frac{1}{a-f} - \frac{1}{e-f} \right). \end{aligned}$$

Si nous exprimons que la combinaison S_4 de S_1, S_2, S_3 est une substitution parabolique, nous trouverons que les quantités $abcdef$ satisfont

à l'égalité (4). Cette égalité jointe aux inégalités (3) est la condition pour que le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 soit discontinu.

4^e EXEMPLE.

Comme 4^e exemple nous prendrons un quadrilatère $abcd$, dont les côtés opposés ab, cd et bc, da sont conjugués; les quatre sommets forment un seul cycle et la somme des angles Σ est une partie aliquote de 2π . Ce quadrilatère engendre un groupe de la 1^{ère} famille et du genre 1. Joignons deux sommets opposés bd par un arc de cercle ayant son centre sur X . Nous obtiendrons ainsi un triangle abd sur les côtés duquel nous marquerons trois points α, β, γ , le premier sur bd , le second sur da , le troisième sur ab et de telle façon que:

$$(b, a) = (a, d) \quad (d, \beta) = (\beta, a) \quad (a, \gamma) = (\gamma, b).$$

Il existera alors une substitution S_1 qui change ab en ad , une autre S_2 qui change βd en βa et une autre S_3 qui change γa en γb ; toutes trois auront pour multiplicateur -1 . Le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 sera discontinu et aura pour polygone générateur l'hexagone $bad\beta a\gamma$ dont les côtés $ba, ad; d\beta, \beta a; a\gamma, \gamma b$ sont conjugués et situés dans le prolongement l'un de l'autre. C'est donc un cas particulier des groupes engendrés par un hexagone $abcdef$ et étudiés dans la remarque relative à l'exemple précédent.

Les substitutions fondamentales du groupe engendré par le quadrilatère $abcd$, sont S_5 qui change ab en dc et S_6 qui change bc en ad , et il est aisé de voir que S_5 est la combinaison de S_3 et de S_1 ; S_6 est la combinaison de S_2 et de S_1 ; d'où la règle suivante pour former tous les groupes fuchsien dérivés d'un quadrilatère tel que $abcd$:

On prendra trois substitutions S_1, S_2, S_3 de multiplicateur -1 et satisfaisant aux conditions énoncées dans la remarque relative à l'exemple précédent; on combinera S_3 et S_1 , ainsi que S_2 et S_1 et on aura les substitutions fondamentales du groupe cherché.

§ 12. Généralisation.

Jusqu'ici nous avons supposé que toutes les substitutions étaient réelles; mais une première généralisation peut être faite immédiatement.

Soit

$$(1) \quad \left(z, \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

une substitution réelle quelconque; et faisons-lui correspondre la substitution:

$$(2) \quad \left(\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}, \frac{a \frac{az + b}{cz + d} + \beta}{\gamma \frac{az + b}{cz + d} + \delta} \right)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes imaginaires quelconques. Supposons que nous donnions à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des valeurs fixes et que l'on fasse parcourir aux quatre quantités a, b, c, d toutes les valeurs réelles telles que $ad - bc = 1$. Il est clair que les substitutions (2) formeront un groupe; et ce groupe jouira des propriétés suivantes:

1° Ses substitutions n'altéreront pas le cercle dont l'équation est:

$$\text{partie imaginaire de } \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta} = 0$$

et que j'appellerai cercle fondamental.

2° Le transformé d'un point z par une des substitutions (2) sera intérieur ou extérieur au cercle fondamental selon que le point z sera lui-même intérieur ou extérieur à ce cercle.

Nous supposons par exemple que si z est au-dessus de X , le point $\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}$ sera intérieur au cercle fondamental.

Supposons maintenant que l'on égale successivement les coefficients de (1) à ceux des diverses substitutions d'un groupe fuchsien G . On obtiendra ainsi une infinité de substitutions (2) qui formeront un groupe G' , et ce groupe sera évidemment discontinu. À ce groupe G correspondra une décomposition de la partie du plan située au-dessus de X en une infinité de polygones normaux R_0, R_1, \dots, R_i tous congruents entre eux. Supposons que z parcoure l'un de ces polygones R_i dont les côtés sont ou l'a vu, ou bien des segments de X ou bien des arcs de cercle ayant leurs centres sur X ; le point $\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}$ parcourra de son côté un certain polygone S_i dont les côtés seront, ou bien des arcs du cercle fondamental, ou bien des arcs de circonférence coupant orthogonalement ce cercle.

Ainsi de même qu'au groupe G correspondait une division de la partie du plan située au-dessus de X en une infinité de polygones nor-

maux congruents; de même au groupe G' correspondra une division de l'intérieur du cercle fondamental en une infinité de polygones normaux congruents, à la condition d'adopter les dénominations suivantes:

Un polygone normal est un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs du cercle fondamental ou bien des arcs de circonférence coupant orthogonalement ce cercle.

Deux figures seront congruentes si l'on passe de l'une à l'autre par une substitution telle que (2), c'est-à-dire par une substitution qui conserve le cercle fondamental. Tout ce qu'on a dit de la distribution des côtés en paires et des sommets en cycles, et de la classification des polygones normaux en familles, en ordres et en genres, reste vrai comme dans le cas particulier auquel nous nous étions restreints jusqu'ici.

Quelles seront maintenant les conditions pour qu'un polygone normal donne naissance à un groupe discontinu G' ? Ce seront les mêmes conditions que nous avons trouvées dans le cas particulier des groupes de substitutions réelles, mais l'énoncé de ces conditions doit être convenablement modifié.

1° La somme des angles des divers sommets correspondants à un même cycle doit être une partie aliquote de 2π .

2° Si ab et cd sont deux côtés conjugués; on devra avoir comme dans le cas des substitutions réelles:

$$\frac{a-b}{a-b'} \frac{a'-b'}{a'-b} = \frac{c-d}{c-d'} \frac{c'-d'}{c'-d}$$

mais a', b', c', d' ne désigneront plus les quantités imaginaires conjuguées de a, b, c, d , mais les symétriques de a, b, c, d par rapport au cercle fondamental (voir la définition du § 7). En d'autres termes si α est le centre du cercle fondamental et ρ son rayon:

$$a' = a + \text{imaginaire conjuguée de } \frac{\rho^2}{a - \alpha}$$

et de même pour b', c', d' .

Nous appellerons groupes fuchsien les groupes discontinus tels que G' ; car ils ne diffèrent pas essentiellement des groupes de substitutions réelles et nous réserverons le nom de groupes Kleinéens à ceux des groupes dont les substitutions ne conservent pas un même cercle fondamental. Nous ferons de ces groupes l'objet d'un mémoire spécial.

Les particularités qui peuvent se présenter sont les mêmes que pour les groupes correspondants de substitutions réelles;

Si le polygone générateur R_0 est du 2^d ordre de la 2^e, de la 4^e, de la 6^e ou de la 7^e familles, l'ensemble des polygones R_i ne recouvrira pas tout l'intérieur du cercle fondamental mais l'intérieur d'un certain domaine limité par une infinité de circonférences coupant orthogonalement ce cercle.

Si le polygone R_0 est de la 3^e, de la 4^e, de la 5^e ou de la 7^e familles, il a des côtés de la 2^e sorte. Nous avons vu au commencement du § 8 que dans ce cas il y a avantage à adjoindre à chaque polygone R_i son symétrique R'_i par rapport à X ; de telle façon que le plan tout entier se trouve divisé en une infinité de régions $R_i + R'_i$ limitées par une ou plusieurs périphéries séparées. Dans le cas qui nous occupe maintenant, nous adjoindrons à chaque polygone R_i son symétrique R'_i par rapport au cercle fondamental, de telle façon que le plan tout entier va se trouver encore divisé en une infinité de régions $R_i + R'_i$.

Laissons de côté pour le moment les régions que nous venons d'appeler R'_i et ne nous occupons que des polygones R_i eux-mêmes. La somme des surfaces de ces polygones, tous intérieurs au cercle fondamental, sera *finie*, ce qui est très important au point de vue des applications ultérieures. Il y aurait exception lorsque le cercle fondamental se réduit à une droite ce qui arrive en particulier dans le cas des groupes de substitutions réelles; mais comme on l'a vu au commencement de ce paragraphe, un changement linéaire de variable suffirait pour ramener au cas général.

Dans mes travaux ultérieurs, je supposerai pour fixer les idées que le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Si l'on n'était pas placé dans ce cas, un changement très-simple de variable y ramènerait aisément.

§ 13. Historique.

Le premier exemple de groupe discontinu formé de substitutions linéaires est celui que l'on rencontre en étudiant le module k d'une fonction elliptique (notation habituelle) ou le module J (notation de M. Klein) considérés comme fonctions du rapport des périodes. M. Hermite a fait une étude approfondie de cette sorte de transcendante et, en montrant qu'elle était uniforme, il faisait voir du même coup que le groupe correspondant était discontinu.

Les fonctions k et J ont été dans la suite, ainsi que le groupe dis-

continu correspondant, étudiées par MM. Dedekind, Fuchs et Klein et plus récemment par M. Hurwitz. Nous citerons en particulier les importants travaux de M. Klein que l'on trouve dans les *Mathematische Annalen* et un remarquable mémoire de M. Fuchs inséré au Tome 83 du Journal de Crelle.

Il est évident qu'un groupe quelconque G en contient une infinité d'autres qui seront tous discontinus, si le groupe G l'est lui-même; de sorte que la connaissance d'un seul groupe discontinu permet d'en former très-aisément une infinité d'autres. C'est cette remarque qui est le point de départ des belles recherches de M. Klein sur la transformation des fonctions elliptiques et sur les fonctions modulaires en général.

Outre ces groupes contenus dans le groupe modulaire dont la discontinuité était évidente, il y a encore un autre groupe dont la discontinuité avait été remarquée par M. Schwarz dans un mémoire inséré au Tome 75 du Journal de Crelle; c'est l'exemple I du § 7. C'était la première fois qu'on arrivait à un pareil résultat sans prendre pour point de départ la théorie des fonctions elliptiques. Enfin M. Fuchs reprit une question analogue dans des travaux insérés au Tome 89 du Journal de Crelle et dans les Actes de la Société de Göttingen. Bien que les groupes étudiés dans ce dernier travail se ramenassent tous à des groupes déjà connus, c'est la lecture de ce remarquable mémoire qui m'a guidé dans mes premières recherches et qui m'a permis de trouver la loi de génération des groupes fuchsien et d'en donner une démonstration rigoureuse.

Je l'ai donnée d'abord dans un mémoire que j'eus l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie des Sciences dans le concours pour le Grand Prix des Sciences Mathématiques du 1^{er} Juin 1880 et j'ai poursuivi l'étude des groupes dans une série de travaux insérés aux Comptes Rendus de l'année 1881.

Le mode de représentation que j'ai employé, c'est à dire la division d'une portion du plan en une infinité de polygones curvilignes, peut être très utile pour l'étude des propriétés générales d'un groupe; c'est ce que j'ai cherché à faire voir. Aux géomètres qui désireraient poursuivre dans cet ordre d'idées l'étude d'un groupe fuchsien ou de tout autre groupe, je recommanderai la lecture de l'Habilitationschrift de M. Walther Dyck de l'université de Leipzig, qui emploie un mode de représentation analogue et en fait ressortir les nombreux avantages.
