SUR LES

FORMES CUBIQUES TERNAIRES ET QUATERNAIRES,

PAR M. H. POINCARÉ,

Professeur à la Faculté de Caen.

PREMIÈRE PARTIE (1).

I. — INTRODUCTION.

L'étude arithmétique des formes homogènes est une des questions les plus intéressantes de la théorie des nombres et une de celles qui ont le plus occupé les géomètres. Les divers problèmes qui se rattachent à la théorie des formes quadratiques binaires ont été résolus depuis longtemps, grâce à la notion de réduite, et la solution en a été développée dans des Ouvrages aujourd'hui classiques. La notion de réduite s'étendait sans peine aux formes quadratiques définies d'un nombre quelconque de variables, et les questions relatives à ces formes ont été traitées dans un grand nombre de Mémoires, parmi lesquels nous citerons un remarquable travail de MM. Korkine et Zolotareff, inséré dans les Tomes VI et XI des *Matematische Annalen* et auquel nous ferons de nombreux emprunts.

Généraliser une idée aussi utile, trouver des formes jouant dans le cas général le même rôle que les réduites remplissent dans le cas des formes quadratiques définies, tel est le problème qui se pose naturellement et que M. Hermite a résolu de la façon la plus élégante dans divers Mémoires insérés dans les Tomes 42 et 47 du *Journal de Crelle*.

(1) La *seconde Partie* paraîtra dans le *LIe Cahier*.

M. Hermite s'est borné à l'étude des formes quadratiques définies ou indéfinies et des formes décomposables en facteurs linéaires; mais sa méthode peut s'étendre sans difficulté au cas le plus général. Je crois que cette généralisation peut conduire à des résultats intéressants, et c'est ce qui m'a déterminé à entreprendre ce travail.

Ce n'est pas la première fois, d'ailleurs, que l'on tente l'application des procédés de M. Hermite à une forme quelconque, et je dois citer à ce sujet un remarquable théorème de M. Jordan (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 5 mai 1879), dont je donnerai dans ce Mémoire une démonstration nouvelle.

Les résultats auxquels je suis arrivé s'appliquent à une forme quelconque; mais, ne voulant pas sacrifier la clarté à la généralité, je me suis restreint aux formes qui sont les plus simples parmi celles que M. Hermite avait laissées de côté. On verra aisément, d'ailleurs, quels sont ceux des théorèmes qui s'étendent au cas le plus général et comment on devait faire pour les généraliser.

Les plus simples de toutes les formes, après les formes quadratiques et les formes décomposables en facteurs linéaires, sont les formes cubiques ternaires. Mais si je m'étais borné à envisager un cas aussi particulier, bien des résultats importants seraient restés dans l'ombre; c'est ce qui m'a déterminé à dire quelques mots des formes cubiques quaternaires. Je n'ai pu pourtant en faire une étude aussi complète que des formes à trois variables; non pas que cette étude présente plus de difficulté, mais parce que j'aurais eu à envisager un nombre très considérable de cas particuliers et que j'aurais été entraîné ainsi à des longueurs inutiles; mon but n'étant que de mettre en lumière quelques particularités propres aux formes quaternaires, j'ai préféré me borner à un petit nombre d'exemples.

Outre la simplicité des formes cubiques ternaires et quaternaires, d'autres considérations ont influé sur mon choix. Ces formes ont été en effet, au point de vue algébrique, l'objet de travaux très intéressants et très complets, et, grâce au lien étroit qui rapproche l'Algèbre supérieure de l'Arithmétique supérieure, ces résultats m'ont été d'un grand secours. Parmi les Mémoires auxquels je renverrai, je citerai :

Un Mémoire de M. Hesse sur les courbes du troisième ordre (*Journal de Crelle*, t. 28);

Deux Mémoires de M. Aronhold sur les formes cubiques ternaires (*Journal de Crelle*, t. 39 et 55);

Un Mémoire de M. Clebsch sur les formes cubiques ternaires (*Mathematische Annalen*, t. VI);

Un Mémoire de M. Steiner sur les surfaces du troisième ordre (*Journal de Crelle*, t. 53) et enfin deux Mémoires de M. Clebsch, intitulés *Ueber die homogene Functionen dritten Grades*, etc. (*ibid.*, t. 58) et *Ueber Knotenpunkte*, etc. (*ibid.*, t. 59).

II. — Définitions.

Nous regarderons deux formes comme identiques quand les coefficients seront les mêmes, quand même les indéterminées seraient représentées par des lettres différentes Nous représenterons une substitution linéaire

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2 + \gamma_1\xi_3 + \delta_1\xi_4, \\ x_2 = \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \gamma_2\xi_3 + \delta_2\xi_4, \\ x_3 = \alpha_3\xi_1 + \beta_3\xi_2 + \gamma_3\xi_3 + \delta_3\xi_4, \\ x_4 = \alpha_4\xi_1 + \beta_4\xi_2 + \gamma_4\xi_3 + \delta_4\xi_4 \end{cases}$$

par la notation

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix}.$$

Dans tout ce qui va suivre, nous désignerons indifféremment les anciennes et les nouvelles variables soit par x_1, x_2, x_3, x_4 et $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, soit par x, y, z, t, et ξ, η, ζ, τ.

Si dans une forme F, homogène en x_1, x_2, x_3, x_4, on fait la substitution T, on obtient une forme en $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, que nous représenterons par la notation

$$F.T.$$

Si dans les équations (1) on fait les substitutions linéaires

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_1\eta_1 + b_1\eta_2 + c_1\eta_3 + d_1\eta_4,\\
\xi_2 &= a_2\eta_1 + b_2\eta_2 + c_2\eta_3 + d_2\eta_4,\\
\xi_3 &= a_3\eta_1 + b_3\eta_2 + c_3\eta_3 + d_3\eta_4,\\
\xi_4 &= a_4\eta_1 + b_4\eta_2 + c_4\eta_3 + d_4\eta_4,
\end{aligned}$$

qui définissent une nouvelle transformation T′, on obtient quatre équations linéaires entre $x_1, x_2, x_3, x_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$. Ces relations définissent une autre substitution linéaire que nous désignerons par la notation

$$\mathrm{T.T'}.$$

Ces opérations auront donc pour symbole le signe même de la multiplication. Toutefois, il faut remarquer qu'elles ne sont pas commutatives, c'est-à-dire qu'on n'a pas

$$\mathrm{T.T'} = \mathrm{T'.T},$$

mais qu'elles sont associatives, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathrm{T.(T'.T'') = (T.T')T''},$$
$$\mathrm{F.(T.T') = (F.T)T'}.$$

Une transformation T sera unitaire si elle a pour déterminant 1 ; elle sera réelle si ses coefficients sont réels, entière si ses coefficients sont entiers.

Deux formes seront *algébriquement équivalentes* ou du même *type* si elles peuvent dériver d'une même troisième par des substitutions unitaires.

Elles seront *réellement équivalentes* ou du même *sous-type* si elles peuvent dériver d'une même troisième par des substitutions réelles et unitaires.

Enfin elles seront *arithmétiquement équivalentes* ou simplement *équivalentes* ou de la même *classe* si elles peuvent dériver d'une même troisième par des substitutions entières et unitaires.

On choisira dans chaque type ou dans chaque sous-type, pour le représenter, une des formes de ce type ou de ce sous-type que l'on appellera la *forme canonique*. Nous désignerons généralement cette canonique par la lettre H. Le choix de la forme H est à peu près arbitraire; toutefois on sera conduit, dans la plupart des cas, à choisir de préférence la forme la plus simple du type considéré.

Disons quelques mots maintenant du langage géométrique dont il sera fait plusieurs fois usage dans ce travail. Si l'on considère x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées trilatères d'un point du plan, si F est une forme homogène en x_1, x_2, x_3, l'équation

$$F = 0$$

définit une courbe plane C. Nous dirons habituellement que la forme F représente la courbe C. De même, si x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coordonnées tétraédriques d'un point de l'espace, nous dirons qu'une forme F, homogène par rapport à ces quatre variables, représente la surface dont l'équation est

$$F = 0.$$

Envisageons, dans les équations (1), x_1, x_2, x_3, x_4 comme les coordonnées d'un point de l'espace; ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 comme les coordonnées d'un autre point.

Les équations (1) définiront alors une *relation homologique* entre deux points de l'espace, de telle sorte que la connaissance de l'un de ces points puisse permettre de déterminer l'autre. Le point (ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4) sera le transformé du point (x_1, x_2, x_3, x_4) par la transformation T; on appellera de même transformée d'une courbe ou d'une surface le lieu des transformées de tous les points de cette courbe ou de cette surface.

Il est clair :

1° Que les transformées d'une droite ou d'un plan sont une droite ou un plan;

2° Que la transformée de la surface $F = 0$ est la surface $F.T = 0$.

Nous disons que T reproduit un point, une droite ou un plan, une courbe ou une surface, quand ce point, cette droite, ce plan, cette courbe et cette surface sont leurs propres transformées.

Nous dirons que T reproduit la forme F quand on aura identiquement

$$F.T = F.$$

Il faut remarquer que T peut reproduire la surface $F = 0$ sans reproduire la forme F ; c'est ce qui arrivera quand on aura identiquement

$$F.T = \alpha F$$

(α étant une constante différente de 1).

Supposons que l'on change le triangle ou le tétraèdre de référence, si $x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sont les anciennes coordonnées de deux points m et m' ; si $y_1, y_2, y_3, y_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ sont les coordonnées nouvelles de ces deux mêmes points, on aura entre ces diverses quantités des relations de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3 + d_1 y_4, \\ x_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 + d_2 y_4, \\ x_3 = a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3 + d_3 y_4, \\ x_4 = a_4 y_1 + b_4 y_2 + c_4 y_3 + d_4 y_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \xi_1 = a_1 \eta_1 + b_1 \eta_2 + c_1 \eta_3 + d_1 \eta_4, \\ \xi_2 = a_2 \eta_1 + b_2 \eta_2 + c_2 \eta_3 + d_2 \eta_4, \\ \xi_3 = a_3 \eta_1 + b_3 \eta_2 + c_3 \eta_3 + d_3 \eta_4, \\ \xi_4 = a_4 \eta_1 + b_4 \eta_2 + c_4 \eta_3 + d_4 \eta_4. \end{cases}$$

Soit S la transformation linéaire

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix};$$

cette substitution définira le changement de coordonnées que l'on vient d'effectuer.

Il est clair que la courbe ou la surface qui, dans l'ancien système de coordonnées, avait pour équation

$$F = 0$$

aura pour équation nouvelle

$$F.S = 0.$$

Nous dirons que le changement de coordonnées défini par la substitution S transforme F en F.S.

Supposons maintenant qu'on élimine les x et les ξ entre les équations (1) et (2), puis qu'on résolve les quatre équations restantes par rapport aux y; y_1, y_2, y_3, y_4 seront alors exprimés en fonctions de n_1, n_2, n_3 et n_4 par quatre équations de la forme

$$\begin{aligned}
y_1 &= A_1 n_1 + B_1 n_2 + C_1 n_3 + D_1 n_4,\\
y_2 &= A_2 n_1 + B_2 n_2 + C_2 n_3 + D_2 n_4,\\
y_3 &= A_3 n_1 + B_3 n_2 + C_3 n_3 + D_3 n_4,\\
y_4 &= A_4 n_1 + B_4 n_2 + C_4 n_3 + D_4 n_4.
\end{aligned}$$

La substitution

$$\Sigma = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

s'appellera la transformée de T par le changement de coordonnées S. Il est clair d'ailleurs que

$$\Sigma = S^{-1}.T.S.$$

Par conséquent, si T reproduit la forme F, Σ reproduira la forme

$$F.S,$$

car

$$F.S.\Sigma = F.S.S^{-1}.T.S = F.T.S = F.S.$$

III. — Classification des transformations.

Soit la transformation

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix};$$

nous dirons qu'elle est canonique si l'on a

$$\beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = \gamma_2 = \delta_2 = \delta_3 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \beta_3 = \beta_4 = \gamma_4 = 0.$$

Envisageons l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \lambda & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 - \lambda & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

La considération des racines de cette équation nous conduira à classer les transformations T en quatre catégories.

T sera de la première catégorie si les racines de l'équation (3) sont toutes distinctes et si de plus les puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de cette équation sont également distinctes, m étant un nombre entier réel quelconque.

T sera de la deuxième catégorie si les racines de l'équation (3) sont distinctes; mais, si leurs puissances $m^{\text{ièmes}}$ ne le sont pas, m étant un nombre entier quelconque, par exemple, si les racines de l'équation (3) sont 1, -1, 2 et 3, T sera de la deuxième catégorie, parce que ces racines sont distinctes, mais que leurs carrés, qui sont 1, 1, 4 et 9, ne sont pas tous différents entre eux.

T sera de la troisième catégorie si les racines de l'équation (3) ne sont pas toutes distinctes, mais si T peut être regardé comme une puissance entière d'une transformation de la deuxième catégorie.

Enfin T sera de la quatrième catégorie si les racines de l'équation (3) ne sont pas toutes distinctes et si, de plus, T ne peut pas être regardé comme une puissance entière d'une transformation de la deuxième catégorie.

Supposons que l'on se propose de rechercher les plans reproductibles par la transformation T.

Soit

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

un tel plan ; on devra avoir

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3 + u_4\alpha_4}{u_1} = \dfrac{u_1\beta_1 + u_2\beta_2 + u_3\beta_3 + u_4\beta_4}{u_2} \\ = \dfrac{u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + u_3\gamma_3 + u_4\gamma_4}{u_3} = \dfrac{u_1\delta_1 + u_2\delta_2 + u_3\delta_3 + u_4\delta_4}{u_4} = \lambda. \end{cases}$$

Il est clair que λ devra satisfaire à l'équation (3), et que, réciproquement, si l'on égale, dans les équations (4), λ à l'une des racines de l'équation (4), ces équations donneront pour les u au moins un système de valeurs et définiront par conséquent au moins un plan reproductible par la transformation F.

Supposons que T soit de la première ou de la deuxième catégorie, c'est-à-dire que l'équation (3) ait quatre racines distinctes, λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4. Il y aura alors quatre plans reproductibles par T.

Imaginons que l'on fasse un changement de coordonnées Σ en prenant pour nouveau tétraèdre de référence le tétraèdre formé par ces quatre plans. Il est clair que la transformée de T par Σ sera

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix},$$

et sera par conséquent canonique, et nous l'écrirons quelquefois, pour abréger, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Il suit de là que T est de la première ou de la deuxième catégorie; on peut choisir Σ de telle sorte que

$$\Sigma^{-1} T . \Sigma$$

soit canonique.

Je dis qu'il en est de même si T est de la troisième catégorie; en effet, dans ce cas, on pourra poser

$$T = \tau^m,$$

τ étant de la deuxième catégorie et m étant un entier positif; soit, pour fixer les idées,

$$m = 3;$$

on aura

$$T = \tau^3 = \tau.\Sigma.\Sigma^{-1}.\tau.\Sigma.\Sigma^{-1}\tau,$$

d'où

$$\Sigma^{-1}.T.\Sigma = (\Sigma^{-1}.\tau.\Sigma)^3.$$

Si donc $\Sigma^{-1}\tau\Sigma$ est canonique, $\Sigma^{-1}T.\Sigma$ le sera également.

Les mêmes considérations vont nous permettre de définir les puissances entières, fractionnaires, incommensurables ou imaginaires d'une transformation de l'une des trois premières catégories.

En effet, soit d'abord une substitution T canonique

$$T = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4).$$

Soient μ_1 l'une des valeurs du logarithme de λ_1, μ_2, μ_3, μ_4 une des valeurs des logarithmes de λ_2, λ_3, λ_4; T^α sera, par définition, la substitution

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha\mu_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha\mu_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\alpha\mu_4} \end{vmatrix} = (e^{\alpha\mu_1}, e^{\alpha\mu_2}, e^{\alpha\mu_3}, e^{\alpha\mu_4}).$$

Supposons ensuite une substitution non canonique; on pourra l'écrire sous la forme

$$\Sigma^{-1}.T.\Sigma,$$

T étant canonique, et sa puissance $\alpha^{\text{ième}}$ sera, par définition,

$$\Sigma^{-1}.T^{\alpha}.\Sigma.$$

Les transformations ternaires de la troisième catégorie se classent en deux types :

$$\textit{Type } A \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}; \qquad \textit{Type } B \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix};$$

mais nous devons remarquer que la substitution *unitaire* du type B est la substitution *unité*, c'est-à-dire celle qui laisse toutes les formes inaltérées.

A ces deux types correspondent deux autres types appartenant à la seconde catégorie :

$$\textit{Type } A' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \beta), \qquad \textit{Type } B' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha),$$

λ_1 et λ_2 étant des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

On trouve de même pour les transformations quaternaires de la troisième catégorie quatre types :

$$\textit{Type } C \ldots (\alpha, \alpha, \beta, \gamma), \qquad \textit{Type } D \ldots (\alpha, \alpha, \beta, \beta),$$
$$\textit{Type } E \ldots (\alpha, \alpha, \alpha, \beta), \qquad \textit{Type } F \ldots (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha),$$

auxquels correspondent, pour la deuxième catégorie, quatre autres types :

$$\textit{Type } C' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \beta, \gamma), \qquad \textit{Type } D' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \beta, \lambda_2\beta),$$
$$\textit{Type } E' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha, \beta), \qquad \textit{Type } F' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha, \lambda_3\alpha),$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

La question qui se pose est de trouver les points, les droites et les plans reproductibles par la transformation T et de discuter complètement le problème, mais il suffira pour notre objet de faire cette discussion pour les transformations ternaires, les résultats devant s'étendre aisément aux transformations quaternaires.

Appelons *triangle principal* le triangle de référence auquel il faut rapporter les équations de T pour réduire cette transformation à la forme canonique; on verra aisément :

1° Que si T est de la première ou de la deuxième catégorie, les seuls points ou droites reproductibles sont les sommets et les côtés du triangle principal;

2° Que si T est de la troisième catégorie et du type A, les points reproductibles sont le sommet $x_1 = x_2 = 0$, et les points du côté $x_3 = 0$, pendant que les droites reproductibles sont la droite $x_3 = 0$ et les droites qui passent par le sommet $x_1 = x_2 = 0$;

3° Que si T est de la troisième catégorie et du type B, tous les points et toutes les droites sont reproductibles.

Supposons que T soit de la première catégorie : aucune de ses puissances entières ne sera de la troisième catégorie, d'où il suit que, si τ_0 est un point quelconque non reproductible, si τ_1 est le transformé de τ_0, τ_2 celui de τ_1, etc., il ne pourra jamais se faire que τ_m se confonde avec τ_0. Donc :

Si T *est de la première catégorie, sauf les sommets du triangle principal* (ou, dans le cas des transformations quaternaires, les sommets du tétraèdre), *tous les points ont une infinité de transformés successifs.*

Passons maintenant aux transformations de la quatrième catégorie; on ne pourra jamais les réduire à la forme canonique, mais on peut choisir Σ de façon à ramener $\Sigma^{-1}T\Sigma$ à sa forme la plus simple.

Ainsi les transformations ternaires de la quatrième catégorie se partageront en deux types, dont je donne ici les formes les plus simples :

$$\textit{Type } A_1 \ldots\ \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}, \qquad \textit{Type } B_1 \ldots\ \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha \end{vmatrix}.$$

Les transformations quaternaires se diviseront en quatre types :

$$\textit{Type } \mathrm{C}_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \gamma \end{vmatrix}, \qquad \textit{Type } \mathrm{D}_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta \end{vmatrix},$$

$$\textit{Type } \mathrm{E}_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon & \beta \end{vmatrix}, \qquad \textit{Type } \mathrm{F}_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha & 0 \\ \varepsilon & \zeta & \theta & \alpha \end{vmatrix}.$$

On voit aisément que les seuls points reproductibles sont les suivants :

Type A$_1$ . . . $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$,
Type B$_1$ . . . $x_1 = x_2 = 0$,
Type C$_1$ . . . $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
Type D$_1$ . . . $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$,
Type E$_1$ . . . $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$,
Type F$_1$ . . . $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Il ne peut y avoir d'exception que pour les types A$_1$, C$_1$, D$_1$, E$_1$, si $\alpha = \beta$.

Or toute puissance entière d'une transformation de quatrième catégorie est elle-même de cette catégorie.

Donc, si T *est de la quatrième catégorie, sauf un nombre fini de points reproductibles, tous les points ont une infinité de transformés successifs.*

Il ne peut y avoir d'exception que pour les types A$_1$, C$_1$, D$_1$, E$_1$ si $\alpha^m = \beta^m$, et alors le lieu des points qui n'ont pas une infinité de transformés successifs est une droite ou un plan.

IV. — Classification des formes.

Les formes cubiques ternaires représentent des courbes du troisième ordre; nous les diviserons en sept familles.

Les quatre premières familles comprendront des formes non décomposables en facteurs, qui représentent des courbes indécomposables.

Parmi elles, *les deux premières familles* comprendront des formes à discriminant différent de o qui représentent des courbes sans point double, c'est-à-dire des courbes de troisième ordre et de sixième classe.

Les formes peuvent toujours s'écrire de la façon suivante :

$$\alpha XYZ + X^3 + Y^3 + Z^3,$$

X, Y, Z étant des formes linéaires en x_1, x_2, x_3; de sorte que la forme canonique qui servira à définir chaque type ou chaque sous-type de ces deux familles sera

$$(5) \qquad 6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3).$$

On démontre, en effet (*voir* un Mémoire de M. Hesse, inséré dans le tome **28** du *Journal de Crelle*), qu'une courbe C du troisième ordre et de le sixième classe a neuf points d'inflexion dont trois toujours réels et six toujours imaginaires. Ces neuf points d'inflexion se distribuent de quatre manières différentes sur trois droites, et ils se distribuent d'une manière et d'une seule sur trois droites réelles. Si l'on prend ces trois droites pour former le triangle de référence, l'équation de la courbe C sera de la forme

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3) = o,$$

de telle sorte que, si F est la forme qui représente la courbe C, on pourra toujours poser

$$F = 6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3)\Sigma,$$

Σ étant une substitution à coefficients réels.

Il suit de là que toute forme cubique ternaire de la première ou de la deuxième famille est réellement équivalente à une forme telle que (5).

Maintenant, parmi ces formes, je distinguerai (et l'on verra plus loin comment j'y suis conduit) :

1° *Une première famille,* composée des formes qui ne sont pas décomposables en une somme de trois cubes;

2° *Une deuxième famille,* composée des formes qui sont décomposables en une somme de trois cubes.

Les formes de la *troisième famille* auront le discriminant nul, mais tous leurs invariants ne seront pas nuls à la fois; elles représenteront des courbes du troisième ordre et de la quatrième classe.

On démontre que ces courbes ont trois points d'inflexion dont un seul est réel, et que ces trois points sont sur une même droite réelle.

Si l'on prend pour former le triangle de référence cette droite et les deux tangentes au point double, on trouve que l'équation de la courbe peut être mise sous la forme

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3) = 0.$$

On en conclut que, si F est une forme de la troisième, elle sera algébriquement équivalente à l'une des formes

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3), \tag{6}$$

ou par conséquent qu'elle sera réellement équivalente à l'une des formes

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3),$$

ou à l'une des formes

$$3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z + \beta x^3 - 3\beta xy^2, \tag{7}$$

selon que les tangentes au point double de la courbe C sont réelles ou bien imaginaires conjuguées.

Les formes de la *quatrième famille* seront celles dont tous les invariants sont nuls. Elles présenteront une courbe du troisième ordre avec un point de rebroussement, et cette courbe sera de troisième classe.

Ces courbes ont un seul point d'inflexion, qui est toujours réel. Prenons, pour former le triangle de référence, la droite qui joint le point d'inflexion au point de rebroussement et les deux tangentes d'inflexion et de rebroussement. L'équation de la courbe pourra s'écrire

$$z^3 + xy^2 = 0,$$

de sorte que toute forme de la quatrième famille sera réellement équivalente à la canonique

$$(8) \qquad z^3 + xy^2.$$

Les *trois dernières famille* comprendront des formes décomposables en facteurs.

Les formes de la *cinquième famille* représenteront une conique S et une droite D non tangentes entre elles.

Prenons, pour former le triangle de référence, la droite D et les tangentes à S aux points où cette conique rencontre D ; l'équation de la courbe décomposable pourra s'écrire

$$\alpha z(z^2 + \beta xy) = 0,$$

de sorte que les formes de la cinquième famille seront algébriquement équivalentes à la canonique

$$(9) \qquad \beta z^3 + 6\alpha xyz,$$

et réellement équivalentes à la canonique

$$\beta z^3 + 6\alpha xyz,$$

ou à la canonique

$$(10) \qquad \beta z^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z,$$

selon que la droite D rencontrera ou non S.

Les formes de la *sixième famille* représenteront une droite D et une conique S, tangentes entre elles. Prenons pour triangle de référence la droite D, une droite H passant par le point de contact de D et de S et la tangente à S au point où cette conique rencontre H.

L'équation de la courbe décomposable pourra s'écrire

$$\alpha y(z^2 + \beta xy) = 0,$$

de sorte que les formes de la sixième famille seront réellement équivalentes à la canonique

$$(11) \qquad 3\alpha yz^2 + 3\beta xy^2.$$

Enfin la *septième famille* se composera des formes décomposables en facteurs linéaires, dont M. Hermite s'est occupé.

Avant d'aller plus loin, il y a lieu de dire quelques mots des principaux invariants et covariants de ces diverses canoniques.

Nous désignerons, suivant l'usage, par $\Delta(f)$ le hessien de la forme f.

Soit à calculer

$$\Delta(6\alpha xyz + \beta x^3 + \gamma y^3 + \delta z^3);$$

nous trouverons aisément

$$36\Delta = \begin{vmatrix} 6\alpha x & 6\alpha z & 6\alpha y \\ 6\alpha z & 6\gamma y & 6\alpha x \\ 6\alpha y & 6\alpha x & 6\alpha z \end{vmatrix},$$

d'où

$$(12) \qquad \Delta = 6(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3)xyz - 6\alpha^2\beta x^3 = -6\alpha^2\gamma y^3 - 6\alpha^2\delta z^3.$$

Calculons de même

$$\Delta(\alpha z + 3\beta xy^2);$$

il vient

$$36\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 6\beta y & 0 \\ 6\beta y & 6\beta x & 0 \\ 0 & 0 & 6\alpha z \end{vmatrix},$$

d'où

$$\Delta = -6\alpha\beta^2 zy^2.$$

Si l'on veut avoir

$$\Delta(3\alpha yz^2 + 3\beta xy^2),$$

on trouve

$$36\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 6\beta y & 0 \\ 6\beta y & 6\beta x & 6\alpha z \\ 0 & 6\alpha z & 6\alpha y \end{vmatrix},$$

ou

$$\Delta = -6\alpha\beta^2 y.$$

M. Aronhold a défini deux invariants des formes cubiques ternaires qu'il a appelés S et T (*Journal de Crelle*, tome 39, p. 152) et que je vais calculer pour les formes qui nous occupent.

Pour faire ce calcul, je rappelle la définition que Clebsch a donnée d'une opération qu'il appelle l'opération δ (*Mathematische Annalen*, t. VI, p. 449).

Soit $\Theta(f)$ un invariant ou un covariant quelconque de la forme f; on convient d'écrire

$$\delta[\Theta(f)] = \frac{d}{d\lambda}\{\Theta[f + \lambda\Delta(f)]\} \text{ pour } \lambda = 0.$$

M. Clebsch arrive aux deux formules suivantes :

$$\delta[\Delta(f)] = \tfrac{1}{2}\mathrm{S}.f, \quad \tfrac{1}{4}\delta(\mathrm{S}) = \mathrm{T}$$

(*Mathematische Annalen*, t. VI, p. 450 et 451).

Mais si l'on remarque que ce que M. Clebsch appelle S et T, c'est ce que M. Aronhold appelle 6S et 6T, on sera conduit à écrire

$$\delta[\Delta(f)] = 3\mathrm{S}.f, \quad \tfrac{1}{4}\delta(\mathrm{S}) = \mathrm{T}.$$

Or, en se bornant aux trois canoniques

$$6\alpha xyz + \beta x^3 + \gamma y^3 + \delta z^3, \quad \alpha z^3 + 3\beta xy^2, \quad 3\alpha yz^2 + 3\beta xy^2,$$

on trouve sans peine, pour la première,

$$\begin{aligned}\delta\Delta = & 36\alpha^2(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3)xyz - 12\alpha(\beta x^3 + \gamma y^3 + \delta z^3)(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3),\\ & + 6\gamma\delta(-2\alpha^2\beta)xyz - 6\alpha^2(-6\alpha^2\beta)x^3,\\ & + 6\beta\delta(-6\alpha^2\gamma)xyz - 6\alpha^2(-6\alpha^2\gamma)y^3,\\ & + 6\beta\gamma(-6\alpha^2\delta)xyz - 6\alpha^2(-6\alpha^2\delta)z^3,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\delta\Delta = & 6\alpha xyz(6\alpha\beta\gamma\delta + 12\alpha^4 - 6\alpha\beta\gamma\delta - 6\alpha\beta\gamma\delta - 6\alpha\beta\gamma\delta),\\ & + \beta x^3(36\alpha^4 - 24\alpha^5 - 12\alpha\beta\gamma\delta),\\ & + \gamma y^3(36\alpha^4 - 24\alpha^5 - 12\alpha\beta\gamma\delta),\\ & + \delta z^3(36\alpha^4 - 24\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma\delta),\end{aligned}$$

ou

$$\delta\Delta = (6\alpha xyz + \beta x^3 + \gamma y^3 + \delta z^3)(12\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma\delta),$$

ou enfin

$$S = 4\alpha^4 - 4\alpha\beta\delta\gamma,$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\delta S = & 8\alpha^3(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3) + 2\beta\gamma\delta(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3)\\ & - 2\alpha\gamma\delta(-6\alpha^2\beta) + 2\alpha\beta\delta(-6\alpha^2\gamma) - 2\alpha\beta\gamma(-6\alpha^2\delta),\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\delta S = & 8\alpha^3\beta\gamma\delta + 16\alpha^6 - 2\beta^2\gamma^2\delta^2 - 4\alpha^3\beta\gamma\delta\\ & + 12\alpha^3\beta\gamma\delta + 12\alpha^3\beta\gamma\delta + 12\alpha^3\beta\gamma\delta,\end{aligned}$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\delta S = 16\alpha^6 + 40\alpha^3\beta\gamma\delta - 2\beta^2\gamma^2\delta^2,$$

d'où

$$T = \tfrac{1}{4}\delta S = 8\alpha^6 + 20\alpha^3\beta\gamma\delta - \beta^2\gamma^2\delta^2.$$

Il est facile de voir que les formes

$$\alpha z^3 + 3\beta xy^2, \quad 3\alpha xy^2 + 3\beta xy^2$$

ont pour invariants

$$S = 0, \quad T = 0.$$

Posons en effet

(13) $$z = z_1, \quad x = \tfrac{1}{4}x_1, \quad y = 2y_1;$$

la première des formes devient

$$\alpha z_1^3 + 3\beta x_1 y_1^2,$$

et est par conséquent reproduite.

Or les équations (13) définissent une transformation

$$H = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

dont le déterminant est $\frac{1}{2}$; on doit donc avoir

$$S[f.H] = \frac{1}{2^4} S[f],$$

$$T[f.H] = \frac{1}{2^6} T[f].$$

Or les deux formes f et $f.H$ sont identiques. Donc

$$S[f.H] = S[f],$$

$$T[f.H] = T[f];$$

on déduit de là

$$S(f) = T(f) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Une démonstration analogue est applicable à la forme

$$3\alpha y z^2 + 3\beta x y^2,$$

qui se reproduit quand on pose

$$z = 2z, \quad y = \tfrac{1}{4} y, \quad x = 16x.$$

Appliquons maintenant la formule (12) aux formes (5), (6) et (9), en faisant successivement

$$\beta = \gamma = \delta,$$

$$\beta = \gamma, \quad \delta = 0,$$

$$\gamma = \delta = 0,$$

Remarquons ensuite que, si K est la substitution linéaire

$$z=\zeta, \quad x=(\xi+i\eta)\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y=(\xi-i\eta)\frac{1}{\sqrt{2}},$$

de telle sorte que

$$K=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

Le déterminant de K sera égal à $-i$; or on aura identiquement

$$(6\alpha xyz+\beta x^3+\beta y^3)K=3\alpha\xi^2\zeta+3\alpha\eta^2\zeta+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi^3-3\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi\eta^2,$$

d'où

(14) $$\left\{\begin{aligned} &\Delta\left(3\alpha\xi^2\zeta+3\alpha\eta^2\zeta+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi^3-3\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi\eta^2\right)\\ &\qquad=(-i)^3\left[\Delta(6\alpha xyz+\beta x^3+\beta y^3)K\right],\end{aligned}\right.$$

$$S\left(3\alpha\xi^2\zeta+3\alpha\eta^2\zeta+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi^3-3\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi\eta^2\right)=(-i)^4\,S(6\alpha xyz+\beta x^3+\beta y^3),$$

$$T\left(3\alpha\xi^2\zeta+3\alpha\eta^2\zeta+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi^3-3\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi\eta^2\right)=(-i)^6\,T(6\alpha xyz+\beta x^3+\beta y^3).$$

De même, soit

$$f=\beta z^3+6\alpha xyz,$$
$$\varphi=\beta\zeta^3+3\alpha\xi^2\zeta+3\alpha\eta^2\zeta;$$

on aura identiquement

$$\varphi=f.K,$$

d'où

$$\Delta(\varphi)=(-i)^3[\Delta(f).K], \quad S(\varphi)=(-i)^4 S(f), \quad T(\varphi)=(-i)^6 T(f).$$

On arrive ainsi aisément aux résultats suivants.

Formes de la première famille.

La canonique

$$(5)\qquad 6\alpha xyz + \beta(x^3+y^3+z^3)$$

donne

$$\Delta = 6(\beta^3+2\alpha^3)xyz - 6\alpha^2\beta(x^3+y^3+z^3),$$
$$S = 4\alpha(\alpha^3-\beta^3),\quad T = 8\alpha^6 + 20\alpha^3\beta^3 - \beta^6.$$

Formes de la deuxième famille.

La canonique étant la même, les covariants et invariants seront les mêmes; nous devrons toutefois remarquer que $S=0$ (Aronhold, *Journ. de Crelle*, t. 39, p. 153).

Formes de la troisième famille.

La canonique

$$(6)\qquad 6\alpha xyz + \beta(x^3+y^3)$$

donne

$$\Delta = 12\alpha^3 xyz - 6\alpha^2\beta(x^3+y^3),$$
$$S = 4\alpha^4,\quad T = 8\alpha^6.$$

La canonique

$$(7)\qquad 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z + \beta x^3 - 3\beta xy^2$$

donne, en vertu des formules (14),

$$-\Delta = 6\alpha^3 x^2 z + 6\alpha^3 y^2 z - 6\alpha^2\beta x^3 + 18\alpha^2\beta xy^2,$$
$$S = 4\alpha^4,\quad T = -8\alpha^6.$$

Nous devons appeler l'attention sur une propriété extrêmement remarquable de S et de T : c'est que S est un carré parfait et T un cube parfait; car

$$T^2 - S^3 = 0.$$

Nous poserons

$$\sqrt{S} = \sqrt[3]{T} = \rho,$$

et il est clair que, dans le cas qui nous occupe, ρ est égal à $2\alpha^2$ pour la canonique (6) et à $-2\alpha^2$ pour la canonique (7).

On voit sans peine que l'on a

$$3\rho f + \Delta = 30\alpha^2 xyz.$$

Formes de la quatrième famille.

La canonique

(8) $$\alpha z^3 + 3\beta xy^2$$

donne

$$\Delta = -6\alpha\beta^2 zy^2$$

$$S = 0, \quad T = 0.$$

Formes de la cinquième famille.

La canonique

(9) $$6\alpha xyz + \beta z^3$$

donne

$$\Delta = 12\alpha^3 xyz - 6\alpha^2\beta z^3,$$

$$S = 4\alpha^4, \quad T = 8\alpha^6.$$

La canonique

(10) $$\beta z^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z$$

donne, en vertu des formules (14) et suivantes,

$$\Delta = 6\alpha^2\beta z^3 + 6\alpha^3 x^2 z - 6\alpha^3 y^2 z,$$

$$S = 4\alpha^4, \quad T = -8\alpha^6.$$

Formes de la sixième famille.

La canonique

$$(11) \qquad 3\alpha yz^2 + 3\beta xy^2$$

donne

$$\Delta = -6\alpha\beta^2 y^3,$$

et

$$S = 0, \quad T = 0.$$

V. — Transformations semblables.

Nous allons maintenant nous occuper de rechercher les transformations qui reproduisent une forme donnée; mais posons d'abord le problème de la manière suivante :

Étant donnée une transformation linéaire T, *trouver les formes qu'elle reproduit.*

Nous ne supposons pas ici que les coefficients de T soient entiers, de sorte que le problème qui nous occupe en ce moment est purement algébrique.

1° *Transformations semblables de la première catégorie.*

Si la transformation T est de la première catégorie, elle pourra s'écrire

$$\Sigma^{-1}.S.\Sigma,$$

S étant canonique.

Si la forme F est reproductible par S, la forme F.Σ sera reproductible par T; donc, pour trouver toutes les formes reproductibles par T, il suffit de trouver toutes les formes reproductibles par S et de leur appliquer la transformation Σ.

Soit

$$S = \left[e^{\mu_1+i\nu_1}, e^{\mu_2+i\nu_2}, e^{\mu_3+i\nu_3}, e^{\mu_4+i\nu_4}\right].$$

Nous pourrons poser

$$S = S_1 . S_2,$$

ou

$$S_1 = [e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, e^{\mu_3}, e^{\mu_4}],$$

$$S_2 = [e^{i\nu_1}, e^{i\nu_2}, e^{i\nu_3}, e^{i\nu_4}]$$

Soit une forme F, reproductible par S, et soit

$$\varphi = A x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} x_4^{m_4}$$

un de ses termes; par la transformation S ce terme devient

$$A \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \xi_3^{m_3} \xi_4^{m_4} e^{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3 + \mu_4 m_4} e^{i(\nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 + \nu_3 m_3 + \nu_4 m_4)}.$$

On doit donc avoir

$$(15) \quad \begin{cases} \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3 + \mu_4 m_4 = 0, \\ \nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 + \nu_3 m_3 + \nu_4 m_4 \equiv 0 \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

La première des équations (15) montre que F est reproductible par S_1, la seconde que F est reproductible par S_2.

Supposons d'abord

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0.$$

Alors S se réduit à S_1, et il suffit, pour trouver toutes les formes F, de trouver toutes les formes reproductibles par S_1. Nous dirons alors que T a sa canonique réelle.

On a, dans ce cas,

$$x_1 \frac{d\varphi}{dx_1} = m_1 \varphi, \quad x_2 \frac{d\varphi}{dx_2} = m_2 \varphi, \quad x_3 \frac{d\varphi}{dx_3} = m_3 \varphi, \quad x_4 \frac{d\varphi}{dx_4} = m_4 \varphi$$

ou

$$\mu_1 x_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + \mu_2 x_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + \mu_3 x_3 \frac{d\varphi}{dx_3} + \mu_4 x_4 \frac{d\varphi}{dx_4}$$
$$= (m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4) \varphi = 0,$$

et, comme cela a lieu pour tous les termes de F, on aura, en appelant

p_1, p_2, p_3, p_4 les dérivées de F par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4.

$$(16)\qquad \mu_1 x_1 p_1 + \mu_2 x_2 p_2 + \mu_3 x_3 p_3 + \mu_4 x_4 p_4 = 0.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que F soit reproductible par la transformation S, c'est que cette forme satisfasse à l'équation différentielle (16).

Supposons maintenant que l'on n'ait pas à la fois

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0;$$

la condition précédente reste nécessaire, mais n'est plus suffisante.

Alors, si la transformation T est réelle, ce que nous supposerons, on aura, par exemple,

$$\nu_2 = -\nu_1, \quad \nu_4 = -\nu_3,$$

et, par conséquent,

$$(17)\qquad \nu_1(m_1 - m_2) + \nu_3(m_3 - m_4) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

1° Si ν_1 et ν_3 sont commensurables avec 2π, la transformation S_2 est de la deuxième catégorie.

2° Si ν_1 et ν_3 ne sont pas commensurables avec 2π, l'équation (17) ne pourra être satisfaite, si elle peut l'être, que si un nombre entier égale $\frac{m_1 - m_2}{h_1} = \frac{m_3 - m_4}{h_2}$, h_1 et h_2 étant deux entiers déterminés; on a donc

$$\frac{2\pi}{h_1}(m_1 - m_2) \equiv 0 \pmod{2\pi}, \qquad \frac{2\pi}{h_2}(m_3 - m_4) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Donc F est reproductible par les transformations

$$\left(e^{\frac{2i\pi}{h_1}},\ e^{-\frac{2i\pi}{h_1}},\ 1,\ 1\right),$$

et

$$\left(1,\ 1,\ e^{\frac{2i\pi}{h_2}},\ e^{-\frac{2i\pi}{h_2}}\right),$$

qui sont de la deuxième catégorie.

3° Il peut arriver enfin qu'on ne puisse satisfaire à l'équation (17), et alors il n'y a pas de forme reproductible par S.

S'il y en a, on vient de voir que ce sont les formes qui satisfont à l'équation (16) et qui, en même temps, sont reproductibles par une ou deux substitutions de la deuxième catégorie.

Quelles sont maintenant les formes reproductibles par T. Pour les trouver, il suffit d'appliquer la substitution Σ aux formes reproductibles par S. Soient y_1, y_2, y_3, y_4 les nouvelles variables, q_1, q_2, q_3, q_4 les dérivées de F par rapport à ces nouvelles variables; les y seront liés aux x et les q aux p par des équations linéaires; de sorte que, par la transformation Σ, l'équation (16) deviendra

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &q_1(a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3+d_1y_4)\\ &+q_2(a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3+d_2y_4)\\ &+q_3(a_3y_1+b_3y_2+c_3y_3+d_3y_4)\\ &+q_4(a_4y_1+b_4y_2+c_4y_3+d_4y_4)=0. \end{aligned}\right.$$

Donc les formes qui sont reproductibles par T devront satisfaire à l'équation (18). Si T a sa canonique réelle, cette condition sera suffisante.

Si T n'a pas sa canonique réelle, il pourra se présenter deux cas.

Dans le premier cas, les formes reproductibles par T devront en outre être reproductibles par une ou deux substitutions de la deuxième catégorie.

Dans le second cas, il n'y aura pas de forme reproductible par T.

2° *Formation des formes reproductibles.*

Proposons-nous de former toutes les formes cubiques binaires, ternaires et quaternaires reproductibles par une transformation canonique réelle de la première catégorie, ainsi que les transformations correspondantes. Voici quel est le procédé que nous emploierons.

Nous choisirons dans la forme cubique ternaire ou quaternaire la plus générale, deux quelconques des termes pour les formes ternaires, trois quelconques des termes pour les formes quaternaires, et nous formerons, de cette manière, toutes les combinaisons possibles, en excluant toutefois :

1° Les combinaisons qui conduiraient à une forme binaire (s'il s'agit des formes ternaires) ou à une forme ternaire (s'il s'agit des formes quaternaires);

2° Les combinaisons qu'on pourrait déduire des combinaisons déjà obtenues par des permutations entre les variables;

3° Les combinaisons qui conduiraient à une forme reproductible par une transformation de la deuxième ou de la troisième catégorie.

Voici comment on pourra reconnaître ces dernières combinaisons.

Supposons que la transformation canonique s'écrive

$$S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4).$$

Si, dans une combinaison, on trouve à la fois les deux termes

$$x_1^3 \quad \text{et} \quad x_2^3,$$

il est clair que la forme à laquelle conduit cette combinaison ne peut être reproductible par S que si

$$\alpha_1^3 = \alpha_2^3,$$

et alors S est de la deuxième catégorie.

De même, si l'on avait à la fois

$$x_1^2 x_4 \text{ et } x_2^2 x_4, \quad \text{ou} \quad x_1 x_4^2 \text{ et } x_2 x_4^2,$$

ou

$$x_1 x_3 x_4 \quad \text{et} \quad x_2 x_3 x_4,$$

il est clair que l'on devrait avoir

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 \quad \text{ou} \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

et que, par conséquent, S serait de la deuxième ou de la troisième catégorie.

Dans tous les cas, de pareilles combinaisons devraient être rejetées.

Dans ces conditions, voici le Tableau auquel on arrive : j'écris à gauche la forme reproductible et à droite la transformation correspondante ; seulement, pour abréger l'écriture, partout, au lieu de

$$(c^{\mu_1}, e^{\mu_2}, e^{\mu_3}, e^{\mu_4}),$$

j'écrirai

$$(\underline{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}),$$

le trait placé en dessous ne permettant pas de confondre les deux notations.

On arrivera ainsi au Tableau suivant :

Formes binaires.

$$xy^2 \qquad (\underline{-2, 1}).$$

Formes ternaires.

$$\begin{array}{rl} z^3 + xy^2 & (\underline{-2, \quad 1; \quad 0}), \\ z^3 + xyz & (\underline{-1, \quad 1, \quad 0}), \\ yz^2 + xy^2 & (\underline{4, -2, -1}). \end{array}$$

Formes quaternaires.

$$\begin{array}{rl} t^3 + yz^2 + xy^2 & (\underline{4, -2, \quad 1, \quad 0}), \\ t^3 + yz^2 + xyt & (\underline{2, -2, \quad 1, \quad 0}), \\ t^3 + yz^2 + xzt & (\underline{-1, -2, \quad 1, \quad 0}), \\ xy^2 + zt^2 + z^2y & (\underline{-8, \quad 4, -1, \quad 1}), \\ xy^2 + z^2y + xzt & (\underline{-4, \quad 2, -1, \quad 5}). \end{array}$$

(Nous avons représenté, pour abréger, x_1, x_2, x_3, x_4 par x, y, z, t).

Il faudrait ajouter au Tableau les formes que l'on obtient en affectant chaque terme des formes précédentes d'un coefficient numérique quelconque et celles que l'on obtient en permutant les variables entre elles d'une façon quelconque. Il est clair, de plus, qu'une forme reproductible par une transformation de la première catégorie est reproductible par toutes les puissances, entières, fractionnaires, ou incommensurables de cette trans formation.

Écrivons maintenant diverses formes quaternaires qui sont reproductibles par deux transformations canoniques, par les puissances de ces transformations et par les produits de ces puissances. Il est aisé de trouver toutes les formes qui satisfont à cette condition ; ce sont :

$$\begin{array}{lll} x^3+yzt & (\underline{0,\ 1,\ -1,\ 0}) & (\underline{0,\ 1,\ 0,\ -1}), \\ x^3+z^2t & (\underline{1,\ -2,\ 0,\ 0}) & (\underline{0,\ 0,\ 1,\ -2}), \\ x^2y+xzt & (\underline{1,\ -2,\ -1,\ 0}) & (\underline{1,\ -2,\ 0,\ -1}), \\ x^2y+yzt & (\underline{1,\ -2,\ 2,\ 0}) & (\underline{1,\ -2,\ 0,\ 2}). \end{array}$$

De ce qui précède, nous tirerons le résultat suivant :

Les formes cubiques ternaires reproductibles par une transformation de la première catégorie sont celles de la quatrième, de la cinquième, et celles de la sixième famille. (Il faudrait ajouter celles de la septième, qui ne figurent pas explicitement au Tableau, devant être regardées comme un cas particulier des formes de la cinquième famille.)

3° *Transformations semblables de la troisième catégorie.*

Soit

$$S = (\underline{\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4})$$

une transformation semblable de la troisième catégorie ; on devra avoir une relation d'égalité entre deux ou plusieurs des μ, sans quoi la transformation ne serait pas de la troisième catégorie.

Soit, pour fixer les idées,

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Supposons, de plus, que μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 sont réels ; car, si cela n'avait pas lieu, on poserait

$$\mu_1 = \mu'_1 + i\mu''_1, \quad \mu_2 = \mu'_2 + i\mu''_2, \quad \mu_3 = \mu'_3 + i\mu''_3, \quad \mu_4 = \mu'_4 + i\mu''_4,$$

d'où

$$S = S_1 . S_2, \quad S_1 = (\underline{\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4}), \quad S_2 = (\underline{\mu''_1, \mu''_2, \mu''_3, \mu''_4}),$$

et l'on démontrerait sans peine que toute forme productible par S est reproductible par S_1.

Si μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 sont réels, toute forme reproductible par S devra satisfaire à l'équation différentielle

$$\mu_1 x_1 p_1 + \mu_2 x_2 p_2 + \mu_3 x_3 p_3 + \mu_4 x_4 p_4 = 0.$$

Il est aisé d'ailleurs de trouver les formes reproductibles par

$$S = (\underline{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}).$$

Il suffit, en effet, de construire toutes les formes en x_2, x_3, x_4, reproductibles par

$$(\underline{\mu_2, \mu_3, \mu_4}),$$

puis d'y remplacer x_2^m par une fonction homogène quelconque de degré m en x_1 et en x_2.

Appliquons cette règle, qui conduit évidemment au résultat, aux formes ternaires; quelles sont les formes cubiques ternaires reproductibles par

$$S = (\underline{\alpha, \alpha, \beta})?$$

Il faut chercher les formes binaires reproductibles par

$$(\underline{\alpha, \beta}).$$

Les seules formes binaires satisfaisant à cette condition sont

$$xy^2$$

(*voir* le Tableau des formes reproductibles).

Donc les seules formes ternaires reproductibles par S pourront s'écrire

$$axy^2 + 2bxyz + cxz^2,$$

et seront, par conséquent, décomposables en trois facteurs.

Il suit de là que les seules formes cubiques ternaires, reproductibles par une transformation de la troisième catégorie et du type A, sont les formes de la septième famille.

4° *Transformations semblables de la deuxième catégorie.*

Nous ne nous occuperons, dans ce qui suit, que des formes cubiques ternaires. Si une pareille forme est reproductible par une transformation de la deuxième catégorie et du type A′, elle sera reproductible également par toutes les puissances entières de cette substitution; elle le sera donc par une transformation de la troisième catégorie et du type A. Par conséquent, elle sera de la septième famille, et, en ce qui concerne les formes de cette famille, nous n'avons rien à ajouter aux travaux de M. Hermite.

Considérons maintenant une cubique ternaire, reproductible par une transformation de la deuxième catégorie et du type B′.

Si cette transformation est réelle, sa canonique sera d'une des trois formes

$$\underline{(i\nu_1,\ -i\nu_1,\ 0)},$$
$$\underline{(i\nu_1,\ -i\nu_1,\ i\pi)},$$
$$\underline{(0,\quad i\pi,\ 0)}.$$

Si la canonique est de la première forme, et si $x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}$ est un des termes de la cubique que cette canonique doit reproduire, on devra avoir

$$\nu_1(m_1 - m_2) \equiv 0 \pmod{2\pi};$$

et, comme $m_1 - m_2$ ne peut être égal qu'à 0, à ± 1, à ± 2 ou à ± 3, on devra avoir

$$\nu_1 = \pi \quad \text{ou} \quad \nu_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \nu_1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Soit d'abord

$$\nu_1 = \pi.$$

La congruence

$$\pi(m_1 - m_2) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

conduit aux solutions suivantes :

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 1,$$
$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1,$$
$$m_1 = 0, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 1,$$
$$m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 0,$$

de sorte que les formes reproductibles par

$$\underline{(i\pi, \; -i\pi, \; 0)}$$

s'écriront

$$x^2 z + xyz + y^2 z + z^3$$

(chaque terme étant affecté d'un coefficient quelconque), et seront, par conséquent, de la cinquième ou de la septième famille.

Supposons maintenant

$$\nu_1 = \frac{2\pi}{3},$$

la congruence

$$\frac{2\pi}{3}(m_1 - m_2) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

donne

$$m_1 = 3, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 0,$$
$$m_1 = 0, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 0,$$
$$m_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad m_3 = 3,$$
$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1,$$

de sorte que les formes reproductibles par

$$\underline{\left(\frac{2i\pi}{3}, \; -\frac{2i\pi}{3}, \; 0\right)} \quad \text{ou} \quad \underline{\left(\frac{4i\pi}{3}, \; -\frac{4i\pi}{3}, \; 0\right)}$$

s'écriront

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz \tag{19}$$

(chaque terme étant affecté d'un coefficient quelconque).

Soit maintenant la canonique

$$\left(\underline{i\nu_1, -i\nu_1, i\pi}\right);$$

elle conduit à la congruence

$$\nu_1(m_1 - m_2) + \pi m_3 \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

d'où

$$2\nu_1(m_1 - m_2) = 0 \pmod{2\pi},$$

ou

$$\nu_1 = \pi, \quad \nu_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \nu_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \nu_1 = \frac{4\pi}{3}, \quad \nu_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \nu_1 = \frac{5\pi}{3}.$$

Si l'on avait $\nu_1 = \pi$, on aurait

$$m_1 - m_2 + m_3 \equiv 0 \pmod 2,$$

ou

$$m_1 + m_2 + m_3 \equiv 0 \pmod 2,$$

ou

$$3 \equiv 0 \pmod 2,$$

ce qui est absurde.

Si l'on avait $\nu_1 = \frac{\pi}{2}$, la forme proposée devrait être reproductible par

$$\left(\underline{\frac{i\pi}{2}, -\frac{i\pi}{2}, i\pi}\right)^2 = \left(\underline{i\pi, -i\pi, 0}\right);$$

elle s'écrirait donc

$$z^3 + zx^2 + zy^2 + xyz.$$

Or, si l'on change z en $-z$, le terme en z^3 change de signe; de sorte que les formes reproductibles par

$$\left(\underline{\frac{i\pi}{2}, -\frac{i\pi}{2}, i\pi}\right)$$

ne doivent pas contenir de terme en z^3, et sont, par conséquent, de la septième famille.

Si l'on a $\nu_1 = \frac{2\pi}{3}$, la forme devra être reproductible par

$$\left(\frac{2i\pi}{3}, -\frac{2i\pi}{3}, i\pi\right)^3 = \left(\frac{2i\pi}{3} - \frac{2i\pi}{3}, 0\right)(0, 0, i\pi);$$

elle ne devrait donc pas changer z en $-z$, c'est-à-dire qu'elle ne pourrait contenir que des termes en

$$x^3,\ y^3,\ z^2x \quad \text{ou} \quad z^2y;$$

de plus, elle devrait être reproductible par

$$\left(\frac{2i\pi}{3}, -\frac{2i\pi}{3}, i\pi\right)^2 = \left(\frac{4i\pi}{3}, -\frac{4i\pi}{3}, 0\right),$$

et ne pourrait, par conséquent, contenir que des termes en

$$x^3,\ y^3,\ z^3 \quad \text{et} \quad xyz.$$

Une pareille somme devrait donc être indépendante de z et, par conséquent, de la septième famille.

On arrive au même résultat en faisant $\nu_1 = \frac{4\pi}{3}$.

Soit

$$\nu_4 = \frac{\pi}{3}.$$

La forme, étant reproductible par

$$\left(\frac{i\pi}{3}, -\frac{i\pi}{3}, i\pi\right)^2 = \left(\frac{2i\pi}{3}, -\frac{2i\pi}{3}, 0\right),$$

ne contiendra que des termes en

$$z^3,\ xyz,\ x^3,\ y^3.$$

Or, si l'on fait

$$x = e^{\frac{i\pi}{3}}\xi, \quad y = e^{-\frac{i\pi}{3}}\eta, \quad z = -\zeta,$$

z^3, xyz, x^3, y^3 se changent en

$$-z^3, \quad -xyz, \quad -x^3, \quad -y^3.$$

Il ne peut donc y avoir de forme reproductible par une pareille transformation; il en est de même si $\nu_1 = \frac{5\pi}{3}$.

Enfin, si l'on envisage la canonique

$$\underline{(0, 0, i\pi)},$$

on voit qu'une forme qu'elle reproduit devra s'écrire

$$x^3 + y^3 + xz^2 + yz^2$$

(chaque terme étant affecté d'un coefficient convenable).

Il est aisé de reconnaître que la courbe représentée par une pareille forme a un point d'inflexion en

$$x = y = 0,$$

et que la polaire de ce point d'inflexion par rapport à la courbe est la droite $z = 0$.

Par conséquent, pour trouver toutes les transformations de la deuxième catégorie qui reproduisent une cubique donnée F, il faut chercher toutes les transformations Σ, telles que

$$F.\Sigma = \alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma z^3 + 6\delta xyz,$$

et toutes les transformations S, telles que

$$F.S = \alpha x^3 + \beta y^3 + 3\gamma xz^2 + 3\delta yz^2;$$

les substitutions de la deuxième catégorie qui reproduiront F seront alors

$$\Sigma\left(\underline{\frac{2i\pi}{3}, -\frac{2i\pi}{3}, 0}\right)\Sigma^{-1},$$

$$\Sigma\left(\underline{\frac{4i\pi}{3}, -\frac{4i\pi}{3}, 0}\right)\Sigma^{-1},$$

$$S\left(\underline{0, 0, i\pi}\right)S^{-1}.$$

Appliquons les principes précédents aux formes des différentes familles :

Première famille.

La forme

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3)$$

est reproductible par les transformations suivantes, qui appartiennent à la deuxième catégorie. Nous n'écrirons que les transformations réelles, et les considérations précédentes nous donnent, de ces transformations, le Tableau suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que toutes ces transformations se réduisent à des permutations entre les lettres x, y, z; c'est là un résultat qu'il était aisé de prévoir. En effet, le système des trois droites

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

est le seul système de trois droites réelles sur lesquelles se distribuent les neuf points d'inflexion. Toute transformation réelle qui reproduit la forme proposée doit donc reproduire le système de ces trois droites ; elle doit donc se ramener à une permutation entre ces trois droites. Une conséquence importante, c'est que toutes les substitutions qui reproduisent la forme

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3)$$

reproduisent également la forme

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

Troisième famille.

La forme

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3)$$

sera évidemment reproductible par toute substitution qui se réduira à une permutation entre les lettres x et y. Réciproquement, puisque les droites $x = 0$, $y = 0$ sont les tangentes au point double, toute substitution réelle ou imaginaire qui reproduira la forme proposée devra reproduire le système de ces deux droites et, par conséquent, se réduire à une permutation entre les lettres x et y.

On voit de même que la seule substitution qui reproduise

$$\beta x^3 + 3\beta xy^2 + 3\alpha x^2 y + 3\alpha y^2 z$$

est la substitution

$$x = \xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta.$$

Remarquons que les deux substitutions

$$x = \eta, \quad y = \xi, \quad z = \zeta,$$
$$x = \xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta,$$

qui reproduisent respectivement

$$\beta x^3 + \beta y^3 + 6\alpha xyz,$$
$$\beta x^3 + 3\beta xy^2 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z,$$

reproduisent également

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

Cinquième famille.

Pour la même raison, les seules substitutions de la deuxième catégorie qui reproduisent

$$z^3 + 6\alpha xyz,$$
$$z^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z$$

sont respectivement

$$x = \eta, \quad y = \xi, \quad z = \zeta;$$
$$x = -\xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta;$$
$$x = -\eta, \quad y = -\xi, \quad z = \zeta$$

pour la première, et

$$x = -\xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta;$$
$$x = -\xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta;$$
$$x = \xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta$$

pour la deuxième.

Ces substitutions reproduisent également

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

Quatrième et sixième famille.

Les mêmes principes permettent de démontrer sans peine que les formes de la quatrième famille ne sont reproductibles par aucune substitution réelle de la deuxième catégorie.

Quant à la forme canonique de la sixième famille

$$x^2 y + y^2 z,$$

elle est reproductible par les transformations suivantes de la deuxième catégorie :

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= -\xi - \lambda\eta, \\ y &= \eta, \\ z - 2\lambda x - \lambda y &= \zeta - 2\lambda\xi - \lambda\eta, \end{aligned}$$

λ étant une quantité quelconque; ces transformations s'écriront avec le mode de notation habituel

$$\begin{vmatrix} -1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4\lambda & -4\lambda^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Toutes ces transformations sont le produit de la transformation unique

$$(-1, 1, 1)$$

par l'une des substitutions de la première catégorie qui reproduisent la forme proposée.

5° *Transformations semblables de la quatrième catégorie.*

Nous ne nous occuperons que des types A_1, B_1 et E_1, ce que nous dirons de ces types s'étendant sans peine aux types C_1, D_1, F_1.

Type A_1.

Soit F une forme homogène en x_1, x_2 et x_3 et reproductible par la transformation

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & \beta \end{vmatrix},$$

on pourra décomposer F en une somme de termes tels que

$$x_1^m \varphi,$$

φ étant une forme homogène en x_2 et en x_3 et reproductible, à un facteur constant près, par la substitution linéaire

$$x_2 = \beta\xi_2,$$
$$x_3 = \gamma\xi_2 + \beta\xi_3,$$

φ sera décomposable en facteurs linéaires et pourra s'écrire

$$\varphi = A(x_2 - \alpha_1 x_3)(x_2 - \alpha_2 x_3)\ldots(x_2 - \alpha_p x_3).$$

Après avoir effectué la substitution linéaire, on aura

$$\varphi = A(\beta\xi_2 - \alpha_1\gamma\xi_2 - \alpha_1\beta\xi_3)(\beta\xi_2 - \alpha_2\gamma\xi_2 - \alpha_2\beta\xi_3)\ldots(\beta\xi_2 - \alpha_p\gamma\xi_2 - \alpha_p\beta\xi_3);$$

φ étant reproductible, on devra avoir

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1\gamma + \alpha_1\beta}{\beta}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_2\gamma + \alpha_2\beta}{\beta}, \quad \ldots, \quad \alpha_p = \frac{\alpha_p\gamma + \alpha_p\beta}{\beta},$$

d'où

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0.$$

φ ne dépendra donc que de x_2; donc F ne dépendra que de x_1 et de x_2. Toute forme ternaire reproductible par une transformation du type A_1 est donc réductible aux formes binaires.

Type B_1.

Soit la transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix};$$

elle reproduit évidemment la forme x_1; cherchons maintenant quelles sont les formes quadratiques qu'elle reproduit.

Soit

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + 2B_1 x_2 x_3 + 2B_2 x_1 x_3 + 2B_3 x_1 x_2$$

la forme quadratique générale. Par la transformation en question, elle devient

$$\begin{aligned}
A_1\xi_1^2 &+ A_2\xi_2^2 + A_3\xi_3^2 + 2B_1\xi_2\xi_3 + 2B_2\xi_1\xi_3 + 2B_3\xi_1\xi_2 \\
&+ 2A_2\alpha\xi_2\xi_1 + 2A_3\beta\gamma\xi_2\xi_1 + 2B_1\beta\xi_2\xi_1 + 2B_1\alpha\gamma\xi_2\xi_1 + 2B_2\gamma\xi_1\xi_2 \\
&+ A_2\alpha^2\xi_1^2 + A_3\beta^2\xi_1^2 + 2B_1\alpha\beta\xi_1^2 + 2B_2\beta\xi_1^2 + 2B_3\alpha\xi_1^2 \\
&+ A_3\gamma^2\xi_2^2 + 2B_1\gamma\xi_2^2 \\
&+ 2A_3\gamma\xi_2\xi_3 \\
&+ 2A_3\beta\xi_1\xi_3 + 2B_1\alpha\xi_1\xi_3,
\end{aligned}$$

ce qui conduit aux relations

$$
\begin{aligned}
& A_2\alpha + A_3\beta\gamma + B_1(\beta + \alpha\gamma) + B_2\gamma = 0, \\
& A_2\alpha^2 + A_3\beta^2 + 2B_1\alpha\beta + 2B_2\beta + 2\beta_3\alpha = 0, \\
& A_3\gamma^2 + 2B_1\gamma = 0, \\
& A_3\gamma \;= 0, \\
& A_3\beta \;+ B_1\alpha = 0.
\end{aligned}
$$

En général $\gamma \gtrless 0$; on a donc

$$A_3 = B_1 = 0,$$

et les équations précédentes se réduisent à

$$
\begin{aligned}
& A_2\alpha + B_2\gamma = 0, \\
(20) \qquad & A_2\alpha^2 + 2B_2\beta + 2B_3\gamma = 0.
\end{aligned}
$$

A_1 est donc arbitraire et des deux équations (20), homogènes en A_2, B_2, B_3, on pourra toujours tirer des valeurs de ces quantités, car des équations homogènes ne sont jamais impossibles.

Soient donc A_2, B_2, B_3 trois quantités qui satisfassent aux équations (20); pour qu'une forme quadratique soit reproductible par la transformation donnée, il faudra et il suffira qu'elle s'écrive

$$(21) \qquad A_1 x_1^2 + \lambda(A_2 x_2^2 + 2B_2 x_1 x_3 + 2B_3 x_1 x_2),$$

A_1 et λ étant deux quantités quelconques.

Réciproquement, si, dans la forme (21), on donne à A_1, A_2, B_2, B_3 des valeurs quelconques, on pourra trouver une infinité de systèmes de valeurs de α, β, γ, qui satisfassent aux équations (20). Je tire de là en passant ce résultat :

Toute forme quadratique ternaire est reproductible par une infinité de transformations de la quatrième catégorie.

Soit maintenant F une forme quelconque reproductible par la transformation considérée. Soit C la courbe qu'elle représente et qui sera également reproductible par la même transformation.

Considérons l'une quelconque des courbes du deuxième ordre

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + 2 B_2 x_1 x_3 + 2 B_3 x_1 x_2 = 0,$$

où A_1 est un paramètre arbitraire et où A_2, B_2, B_3 ont les valeurs tirées des équations (20). Par chacun des points m de la courbe C, on pourra faire passer une de ces coniques; comme ces coniques sont reproductibles, les transformés successifs des points m sont à la fois sur la courbe C et sur la conique qui passe par m. Mais le point m a une infinité de transformés successifs, tandis que la courbe C et la conique, qui sont algébriques, ne peuvent, à moins de se confondre, avoir une infinité de points communs. Donc la courbe C se réduit à un certain nombre de coniques reproductibles.

La conséquence est que la forme F est fonction homogène de x_1^2 et

$$A_2 x_2^2 + 2 B_2 x_1 x_3 + 2 B_3 x_1 x_2.$$

Elle satisfait donc à l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} \frac{dF}{dx_1} & \frac{dF}{dx_2} & \frac{dF}{dx_3} \\ x_1 & 0 & 0 \\ B_3 x_2 + B_2 x_3 & A_2 x_2 + B_3 x_1 & B_2 x_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(A_2 x_2 + B_3 x_1) \frac{dF}{dx_3} - B_2 x_1 \frac{dF}{dx_2} = 0.$$

Conséquence. — Toute forme reproductible par une transformation de la quatrième catégorie et du type B_1 satisfait à une équation aux différences partielles, linéaire et homogène par rapport aux variables x_1, x_2 et x_3, ainsi que par rapport aux dérivées partielles $\frac{dF}{dx_1}, \frac{dF}{dx_2}, \frac{dF}{dx_3}$.

Les seules formes cubiques qui satisfassent à cette condition sont celles de la sixième famille.

Type E_1.

Soit F une forme reproductible par

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon & \beta \end{vmatrix}.$$

Cette forme pourra se décomposer en termes tels que

$$x_1^m \varphi,$$

φ étant une forme homogène en x_2, x_3, x_4.

Il est évident que φ devra être reproductible à un facteur constant près par

$$\begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \\ \delta & \varepsilon & \beta \end{vmatrix},$$

et par conséquent absolument reproductible par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{\beta} & 1 & 0 \\ \frac{\delta}{\beta} & \frac{\varepsilon}{\beta} & 1 \end{vmatrix}.$$

Donc φ satisfera à une équation de la forme

$$(Ax_3 + Bx_2)\frac{d\varphi}{dx_4} - Cx_2\frac{d\varphi}{dx_3} = 0.$$

Il en sera de même de $x_1^m\varphi$ et, par conséquent, de F.

Il suit de là que toute forme reproductible par une transformation du type E_1 satisfait à une équation aux différences partielles linéaire et homogène, par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, x_4, ainsi que par rapport aux dérivées partielles $\frac{dF}{dx_1}$, $\frac{dF}{dx_2}$, $\frac{dF}{dx_3}$, $\frac{dF}{dx_4}$.

Ce résultat se généralise sans peine et s'étend aux types D_1, C_1 et F_1.

Toute forme reproductible par une transformation de la quatrième catégorie satisfait à une équation aux différences partielles.

6° Transformations semblables simultanées.

Supposons qu'une forme soit reproductible à la fois par deux transformations S et S_1; elle sera reproductible également par tous les produits des puissances de S et de S_1; tels que

$$S^\alpha S_1^\beta S^\gamma S_1^\delta S^\varepsilon.$$

On pourra donc former un groupe de transformations semblables simultanées qui reproduisent la forme proposée.

Supposons que S et que S_1 soient de la première ou de la troisième catégorie et que S soit canonique, on peut, en effet, toujours ramener le cas général à ce cas particulier, à moins que S et que S_1 ne soient de la deuxième catégorie, ce que nous ne supposerons pas.

Si p_1, p_2, p_3, p_4 sont les quatre dérivées partielles de la forme proposée f par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, x_4; f devra satisfaire aux équations différentielles

$$ax_1p_1 + bx_2p_2 + cx_3p_3 + dx_4p_4 = 0,$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4)p_1 \\ &+ (a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4)p_2 \\ &+ (a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4)p_3 \\ &+ (a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 + d_4x_4)p_4 = 0. \end{aligned}\right.$$

Ceci va nous permettre de former d'une autre manière le groupe des transformations semblables simultanées qui reproduisent f; en effet, en prenant les crochets des deux équations (22) (qui sont des équations simul tanées aux dérivées partielles du premier ordre), puis prenant encore les crochets des nouvelles équations obtenues, on obtient de nouvelles équations aux dérivées partielles, qu'on peut ajouter entre elles après les avoir multipliées par des coefficients quelconques. On obtient ainsi une infinité d'équations de même forme que la seconde des équations (22); ces équations définissent par conséquent de nouvelles transformations qui reproduisent f.

Prenons donc les crochets des deux équations (22), nous trouverons

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{o} = {} & [b_1(b-a)x_2 + c_1(c-a)x_3 + d_1(d-a)x_4]p_1 \\ & + [a_2(a-b)x_1 + c_2(c-b)x_3 + d_2(d-b)x_4]p_2 \\ & + [a_3(a-c)x_1 + b_3(b-c)x_2 + d_3(d-c)x_4]p_3 \\ & + [a_4(a-d)x_1 + b_4(b-d)x_2 + c_4(c-d)x_3]p_4. \end{aligned}\right.$$

Prenons encore les crochets de la première des équations (22) et de l'équation (23) et nous obtiendrons une nouvelle équation (24) qui ne différera de l'équation (23) que parce que les facteurs entre parenthèses $(b-a), (c-a), (d-a), \ldots$ seront remplacés par $(b-a)^2, (c-a)^2, (d-a)^2$.

Pour que les équations (22) soient compatibles, il faut que l'équation (24) soit une conséquence des équations (22) et (23).

Supposons donc qu'on ajoute les équations (23) et (24) après les avoir respectivement multipliées par des coefficients convenablement choisis; on obtiendra une équation résultante (25), et on aura toujours pu s'arranger de façon que dans cette équation (25) le coefficient de x_3p_4, par exemple, soit nul.

Le premier cas qui peut se présenter, c'est que l'équation (25) se réduise à

$$\mathrm{o} = \mathrm{o},$$

ce qui exige les égalités

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} & (a-b)\frac{b_1}{b_1} = (a-c)\frac{c_1}{c_1} = (a-d)\frac{d_1}{d_1} \\ & = (b-a)\frac{a_2}{a_2} = (b-c)\frac{c_2}{c_2} = (b-d)\frac{d_2}{d_2} \\ & = (c-a)\frac{a_3}{a_3} = (c-b)\frac{b_3}{b_3} = (c-d)\frac{d_3}{d_3} \\ & = (d-a)\frac{a_4}{a_4} = (d-b)\frac{b_4}{b_4} = (d-c)\frac{c_4}{c_4}. \end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant que l'équation (25) ne se réduise pas à une identité. On formera une équation (27) en prenant les crochets de (25) et de la première des équations (22). Il est clair que dans (27) le coefficient de $x_3 p_4$ est nul. On ajoutera ensuite les équations (25) et (27), après les avoir multipliées par des constantes telles que dans l'équation résultante (28) le coefficient de $x_2 p_4$ soit nul.

Si l'équation (28) est une identité, on est ramené au premier cas, à la condition de remplacer les équations (23) et (24) par (25) et (27), si l'équation (28) n'est pas une identité, on recommence sur (28) la même opération que sur (25), et ainsi de suite. Il est clair que, après douze opérations au plus, on arrivera à une identité.

Par conséquent, tous les cas possibles peuvent se ramener au premier cas, et l'on peut toujours supposer que les équations (26) sont satisfaites.

Dans ce qui va suivre, nous dirons, pour abréger, en parlant des différences $a-b$, $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-e$, ..., les $a-b$, et en parlant des coefficients b_1, c_1, d_1, a_2, b_3, ..., les b_1.

Les équations (26) peuvent être satisfaites de différentes façons.

Première hypothèse.

Tous les $a-b$ sont différents entre eux; il faut alors que tous les b_1 soient nuls, excepté un, b_1 par exemple.

Alors l'équation (23) se réduit à

$$p_1 = 0.$$

On en conclut que toute forme reproductible à la fois par les deux transformations proposées ne contient pas x_1 et est par conséquent réductible aux formes ternaires.

La première hypothèse doit donc être rejetée.

Dans les deuxième, troisième et quatrième hypothèses, on supposera que deux des $a-b$ sont égaux entre eux.

Deuxième hypothèse.

On a

$$a - b = a - c,$$

il faut alors que tous les b_i soient nuls, excepté b_1 et c_1 ou bien excepté a_2 et a_3.

Si

$$b_1 \gtrless 0, \quad c_1 \gtrless 0;$$

l'équation (23) se réduit à

$$p_1 = 0,$$

la forme F est donc réductible aux formes ternaires. Si

$$a_2 \gtrless 0, \quad a_3 \gtrless 0,$$

l'équation (23) s'écrit

$$a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0,$$

et son intégrale générale est

$$F = \text{fonction générale de } x_1, x_4 \text{ et } a_3 x_2 - a_2 x_3,$$

F est donc encore réductible aux formes ternaires.

Par conséquent, la deuxième hypothèse doit être rejetée pour la même raison que la première.

Troisième hypothèse.

On a

$$a - b = b - c.$$

Il faut alors que tous les b_i s'annulent, excepté b_1 et c_2.

L'équation (23) s'écrit

$$b_1 x_2 p_1 + c_2 x_3 p_2 = 0,$$

et a pour intégrale générale.

$$F = \text{fonction arbitraire de } x_3, x_4 \text{ et } x_3 x_1 + \lambda x_2^2,$$

λ étant une constante.

Donc, pour obtenir une forme reproductible à la fois par la transformation qui correspond à (23) et par une transformation canonique, il suffit d'additionner deux monômes de même degré en

$$x_3, x_4 \quad \text{et} \quad \sqrt{x_3 x_1 + \lambda x_2^2};$$

on peut, par exemple, obtenir deux formes cubiques, non décomposables en facteurs : ce sont

$$x_4^3 + x_3(x_3 x_1 + \lambda x_2^2),$$
$$x_3^3 + x_4(x_3 x_1 + \lambda x_2^2).$$

Quatrième hypothèse.

On a

$$a - b = c - d.$$

Tous les b_i s'annulent, excepté b_1 et d_3.

L'équation (23) s'écrit

$$b_1 x_2 p_1 + d_3 x_4 p_3 = 0$$

et a pour intégrale générale

$$F = \text{fonction arbitraire de } x_2,\ x_4 \text{ et } x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3,$$

λ étant une constante.

On obtiendra donc les formes cubiques non décomposables en facteurs, et satisfaisant aux conditions proposées, en écrivant

$$x_2^3 + x_4(x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3),$$
$$x_4^3 + x_2(x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3).$$

La seconde de ces formes se déduit de la première par une permutation d'indices.

Dans les cinquième et sixième hypothèses, on supposera que trois des $a - b$ sont égaux entre eux.

Cinquième hypothèse.

On a

$$a - b = b - c = c - d.$$

Tous les b_i s'annulent, excepté b_1, c_2 et d_3.

L'équation (23) s'écrit

$$b_1 x_2 p_1 + c_2 x_3 p_2 + d_3 x_4 p_3 = 0,$$

d'où

$$F = \text{fonction arbitraire de } x_4, x_4 x_2 + \lambda x_3^2, x_4^2 x_1 + \mu x_4 x_2 x_3 + \nu x_3^3,$$

λ, μ et ν étant des constantes.

On conclut de là que la seule forme cubique qui soit reproductible à la fois par la transformation qui correspond à l'équation (23) et par une transformation canonique, et qui de plus ne soit pas décomposable en facteurs, est la suivante :

$$x_4^2 x_1 + \mu x_4 x_2 x_3 + \nu x_3^3.$$

Sixième hypothèse.

On a

$$a - b = a - c = a - d.$$

Tous les b_i s'annulent, excepté b_1, c_1, d_1 ou bien excepté a_2, a_3, a_4; l'équation (23) s'écrit

$$p_1 = 0,$$

ou bien

$$a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 = 0,$$

de sorte que F est réductible aux formes ternaires, et que l'hypothèse doit être rejetée.

Dans la septième et la huitième hypothèse, on supposera que quatre des $a - b$ sont égaux entre eux.

Septième hypothèse.

On a

$$a - b = a - c = b - d = c - d.$$

Tous les b_i sont nuls, sauf b_1, c_1, d_2 et d_3.

L'équation (23) s'écrit

$$(b_1 x_2 + c_1 x_3) p_1 + d_2 x_4 p_2 + d_3 x_4 p_3 = 0,$$

d'où

$$\text{F} = \text{fonction arbitraire de } x_4,\ x_2 + \nu x_3,\ x_4 x_1 + \lambda x_2^2 + \mu x_2 x^3,$$

λ, μ et ν étant des constantes.

On conclut aisément qu'il n'existe pas de forme cubique indécomposable et reproductible à la fois par les deux transformations proposées.

Huitième hypothèse.

On a

$$a - c = b - c = b - d = a - d.$$

L'équation (23) doit alors se réduire à

$$c_1 x_3 p_1 + d_1 x_4 p_1 + c_2 x_3 p_2 + d_2 x_4 p_2 = 0,$$

et a pour intégrale générale

$$\text{F} = \text{fonction arbitraire de } x_3,\ x_4 \text{ et } x_1 x_3 + \lambda x_1 x_4 + \mu x_2 x_3 + \nu x_2 x_4,$$

d'où l'on conclut qu'il n'existe aucune forme cubique indécomposable et reproductible à la fois par la transformation correspondant à l'équation (23), et par une transformation canonique.

Nous devons faire d'abord une remarque importante sur la seconde des équations (22), c'est que, si l'on multiplie l'équation (23) par un coefficient convenable, puis qu'on la retranche de l'équation (22), il vient

$$a_1 x_1 p_1 + b_2 x_2 p_2 + c_3 x_3 p_3 + d_4 x_4 p_4 = 0,$$

de sorte que l'on doit avoir

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_2} = \frac{c}{c_3} = \frac{d}{d_4},$$

à moins que la forme F ne soit reproductible à la fois par deux transformations canoniques qui ne soient pas des puissances d'une même substitution.

Tout ce qui précède suppose que les équations (23) et (24) ne se réduisent pas à des identités. Voyons ce qui arriverait si pareille chose avait lieu.

Première hypothèse.

Toutes les quantités a, b, c, d sont différentes entre elles.

Dans ce cas, tous les b_1 doivent être nuls, et l'équation (22) se réduit à

$$a_1 x_1 p_1 + b_2 x_2 p_2 + c_2 x_3 p_3 + d_4 x_4 p_4 = 0.$$

Par conséquent, les deux transformations proposées sont canoniques, et l'on a vu plus haut le Tableau des formes cubiques quaternaires qui sont reproductibles à la fois par deux transformations pareilles.

Deuxième hypothèse.

On a

$$a = b.$$

Dans ce cas, tous les b_1 sont nuls, sauf b_1 et a_2, et l'équation (22) s'écrit

$$(a_1 x_1 + b_1 x_2) p_1 + (a_2 x_1 + b_2 x_2) p_2 + c_3 x_3 p_3 + d_4 x_4 p_4 = 0.$$

Si l'on suppose que la transformation qui correspond à cette seconde équation est de la première ou de la troisième catégorie, il sera possible de la ramener à la forme canonique par un changement linéaire de variables, et l'on voit aisément que, après que ce changement est effectué, la transformation qui correspond à la première équation (22) reste canonique; et par conséquent on est amené au cas précédent.

Si l'on suppose, au contraire, que la transformation qui correspond à la seconde équation (22) est de la quatrième catégorie, elle sera évidemment du type C, et par conséquent la forme F réductible aux formes ternaires.

Troisième hypothèse.

On a

$$a = b \quad \text{et} \quad c = d;$$

tous les b_i sont nuls, sauf b_1, a_2, c_4 et d_3.

Quatrième hypothèse.

On a

$$a = b = c;$$

tous les b_i sont nuls, sauf b_1, c_1, a_2, c_2, a_3, b_3.

Dans la troisième et la quatrième hypothèse, si la transformation T_1 qui correspond à la deuxième équation (22), est de la première ou de la troisième catégorie, on raisonnera comme dans la deuxième hypothèse et on arrivera au même résultat.

Dans la troisième hypothèse, si cette transformation T_1 est de la quatrième catégorie, elle est du type D_1 et par conséquent la forme F est réductible aux formes binaires.

Dans la quatrième hypothèse, si T_1 est de la quatrième catégorie, elle est du type E_1; mais toute forme quaternaire reproductible par une transformation du type E_1 est décomposable en facteurs.

RÉSUMÉ.

On a vu plus haut le Tableau des formes cubiques quaternaires reproductibles par deux transformations canoniques qui ne sont pas les puissances d'une même substitution.

Nous allons donner maintenant, en nous appuyant sur les considérations précédentes, le Tableau des formes cubiques quaternaires qui ne sont ni réductibles aux formes ternaires, ni décomposables en facteurs, et qui sont reproductibles par deux transformations de la première, de la troisième ou de la quatrième catégorie, l'une canonique et l'autre non canonique,

$$x_4^3 + x_3^2 x_1 \quad + x_3 x_2^2,$$

$$x_2^3 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_2^2,$$

$$x_2^3 + x_1 x_4^2 \quad + x_4 x_2 x_3.$$

Il faudrait, bien entendu, ajouter les formes qu'on peut déduire des précédentes en affectant chaque terme d'un coefficient quelconque, et toutes celles qu'on peut en déduire par des permutations d'indices.

En ce qui concerne les formes ternaires, la longue discussion qui précède n'est pas nécessaire; en effet, considérons des formes de la quatrième famille, par exemple : elles représentent des courbes offrant un point de rebroussement et un point d'inflexion; toute substitution qui reproduit la forme donnée reproduira aussi les points singuliers et les tangentes en ces points, et la droite qui joint ces deux points.

Si une transformation de la première catégorie reproduit ce triangle et est canonique, c'est que le triangle est le triangle de référence, et s'il est le triangle de référence, toute transformation de la première catégorie qui le reproduit est canonique.

Donc une forme de la quatrième famille ne peut être reproductible à la fois par deux transformations de la première catégorie, l'une canonique et l'autre non canonique; et, d'ailleurs, nous avons vu qu'une pareille forme n'est reproductible par aucune substitution de la troisième ou de la quatrième catégorie.

Le même raisonnement s'applique aux formes de la cinquième famille. Par conséquent, les seules formes cubiques ternaires qui soient reproductibles par deux transformations de la première, de la troisième ou de la quatrième catégorie, l'une canonique et l'autre non canonique, sont celles de la sixième famille.

Dans un prochain Mémoire, j'étudierai les applications des considérations qui précèdent à l'étude arithmétique des formes cubiques ternaires.

FIN DU L^e CAHIER.