| | | |
|---|---|---|
| T.......... | 1881, mai 20,43088, temps moyen de Paris. | |
| $\varpi$.......... | $300^\circ.14'.16'',5$ | Équinoxe moyen 1881,0. |
| $\Omega$.......... | $126.30.59,0$ | |
| $i$.......... | $77.52.53,5$ | |

log $q$ .............. $\bar{1},771822$

Mouvement direct.

*Représentation de l'observation moyenne.*

En longitude $(O-C)\cos\beta$............ $+1'',8$

En latitude $(O-C)$ ............. $-0'',8$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions fuchsiennes.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Dans la dernière Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, j'ai montré comment certaines classes de fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes permettent d'intégrer une équation linéaire à coefficients rationnels, si tous les points singuliers sont réels. Je veux, aujourd'hui, définir une classe plus étendue de fonctions fuchsiennes qui permet l'intégration dans des cas beaucoup plus généraux.

» Supposons un polygone curviligne dont les côtés soient successivement $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, ..., $A_n$, $B_n$; je suppose que ces côtés sont des cercles coupant orthogonalement le cercle fondamental; j'appelle $\alpha_i$ et $\beta_i$ les deux intersections des cercles $A_i$ et $B_i$, $\lambda_i$ l'angle correspondant du polygone curviligne et $\sigma$ la somme de tous les angles de ce polygone; je suppose que $\lambda_i$ et $\sigma-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)$ sont des parties aliquotes de $2\pi$.

» Je définis $n$ fonctions de $z$ par les équations

$$\frac{z_i-\alpha_i}{z_i-\beta_i}=e^{\sqrt{-1}\lambda}\frac{z-\alpha_i}{z-\beta_i}\quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

» On verrait, comme dans la Note précédente, qu'il y a une infinité de fonctions uniformes de $z$ satisfaisant aux conditions

$$F(z)=F(z_1)=F(z_2)=\ldots=F(z_n)$$

et que toutes s'expriment rationnellement en fonction de l'une d'entre elles.

» En faisant tendre les $\lambda$ et $\sigma$ vers 0, on obtient à la limite des fonctions remarquables sur lesquelles je veux attirer l'attention. Sur le cercle fondamental je marque $2n$ points $\alpha_1$, $\beta_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$, ..., $\alpha_n$, $\beta_n$, et je suppose qu'on les rencontre dans l'ordre que je viens d'indiquer, en suivant le cercle dans le sens positif; ces points devront satisfaire à la condition suivante. Je joins le point $\beta_1$ à $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ par des cercles $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ normaux au cercle fondamental; je joins de même $\beta_2$ à $\beta_3$, $\beta_3$ à $\beta_4, \ldots, \beta_{n-1}$ à $\beta_n$ par des cercles $\delta_3, \delta_4, \ldots, \delta_n$ normaux au cercle fondamental; par les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ je mène des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ coupant orthogonalement le cercle fondamental et normaux respectivement à $\gamma_2, \delta_3, \delta_4, \ldots, \delta_n, \gamma_n$; par l'intersection de $C_1$ et $C_2$ je mène un cercle $D_3$, normal au cercle fondamental et à $\gamma_3$; par l'intersection de $C_3$ et de $D_3$ je mène $D_4$, normal au cercle fondamental et à $\gamma_4$, etc. : $D_n$ *devra passer par* $\alpha_n$ *et se réduire, par conséquent, à* $C_n$. Je définis $n$ fonctions de $z$ par les équations

$$\frac{1}{z_i - \alpha_i} = \frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\beta_i - \alpha_i} - \frac{1}{\beta_{i-1} - \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

» Il existera une infinité de fonctions uniformes de $z$ telles que

$$F(z) = F(z_1) = F(z_2) = \ldots = F(z_n), \quad \text{d'où} \quad F(\beta_1) = F(\beta_2) = \ldots = F(\beta_n).$$

» Toutes s'expriment rationnellement par une d'entre elles que j'appelle $F(z)$ et que j'achève de définir par les conditions

$$F(\alpha_1) = 0, \quad F(\alpha_2) = 1, \quad F(\alpha_3) = \infty.$$

» Cette fonction sera holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental; elle ne pourra, à l'intérieur de ce cercle, devenir égale à aucun des nombres

$$(1) \qquad F(\alpha_1), \; F(\alpha_2), \; \ldots, \; F(\alpha_n), \; F(\beta_1).$$

» Si donc, dans une équation linéaire à coefficients rationnels en $x$ n'ayant d'autres points singuliers que les nombres (1), on substitue $F(z)$ à la place de $x$, l'intégrale sera une fonction zétafuchsienne de $z$.

» $F(z)$ dépend de $2n - 3$ paramètres, à savoir les rapports anharmoniques de $\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; à cause de la condition énoncée plus haut, il reste $2n - 4$ paramètres indépendants. En exprimant que les parties réelles et imaginaires de

$$F(\alpha_4), \; F(\alpha_5), \; \ldots, \; F(\alpha_n), \; F(\beta_1)$$

ont des valeurs données, on a $2n - 4$ équations qui déterminent ces $2n - 4$ paramètres.

» *Si j'arrive à démontrer que ces équations ont toujours une solution réelle,* *j'aurai montré que toutes les équations linéaires à coefficients algébriques s'intègrent par les transcendantes fuchsiennes et zétafuchsiennes.*

» Je voudrais donner quelques éclaircissements sur ma précédente Communication. J'y parle de la fonction $F(z)$ quand tous les $\lambda$ sont nuls: j'entends la limite de $F(z)$ quand tous les $\lambda$ tendent vers o. J'ai dit que les quantités $F(\alpha_1)$, $F(\alpha_2)$, ..., $F(\alpha_{n+1})$ peuvent prendre des valeurs réelles quelconques : cela n'est vrai que quand tous les $\lambda$ sont nuls.

» Une dernière remarque : j'ai fait voir que les coordonnées d'un point d'une infinité de courbes algébriques s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'un même paramètre (de même que les coordonnées d'un point d'une courbe de genre o s'expriment par des fonctions rationnelles et celles d'un point d'une courbe de genre 1 par des fonctions elliptiques) : parmi les courbes qui jouissent de cette propriété, il y en a de tous les genres possibles; mais je ne sais pas encore si cette propriété appartient à une courbe algébrique quelconque. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Relations algébriques entre les sinus supérieurs d'un même ordre.* Note de M. **Rouyaux**, présentée par M. Yvon Villarceau.

« Avec M. Yvon Villarceau, je désignerai par $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ les $n$ sinus du $n^{\text{ième}}$ ordre [1]; quand il y aura lieu de distinguer les sinus hyperboliques des sinus elliptiques, les premiers seront désignés par la lettre f et les seconds par la lettre *f*. Je prends pour définition des sinus d'ordre $n$ les formules

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= e^{x\alpha_1} + e^{x\alpha_2} + \ldots + e^{x\alpha_j} + \ldots + e^{x\alpha_k} + \ldots + e^{x\alpha_n},\\
\pm \varphi_1 &= \alpha_1^{n-1} e^{x\alpha_1} + \ldots + \alpha_j^{n-1} e^{x\alpha_j} + \ldots + \alpha_k^{n-1} e^{x\alpha_k} + \ldots + \alpha_n^{n-1} e^{x\alpha_n},\\
\pm \varphi_2 &= \alpha_1^{n-2} e^{x\alpha_1} + \ldots + \alpha_j^{n-2} e^{x\alpha_j} + \ldots + \alpha_k^{n-2} e^{x\alpha_k} + \ldots + \alpha_n^{n-1} e^{x\alpha_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\pm \varphi_{n-1} &= \alpha_1 e^{x\alpha_1} + \ldots + \alpha_j e^{x\alpha_j} + \ldots + \alpha_k e^{x\alpha_k} + \ldots + \alpha_n e^{x\alpha_n},
\end{aligned}$$

dans lesquelles les signes supérieurs des premiers membres répondent aux sinus hyperboliques, les signes inférieurs répondant aux sinus elliptiques, et, dans les seconds membres, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n$ désignent les racines de $r^n \pm 1 = 0$, suivant qu'il s'agit du genre hyperbolique ou elliptique. Multiplions la première équation par $\alpha_j^n$, la deuxième par $\alpha_j$, la troi-

[1] M. Rouyaux augmente d'une unité les ordres adoptés par ses prédécesseurs. (Y. V.)