ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions fuchsiennes.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Parmi les fonctions fuchsiennes, il en est qui jouissent de certaines propriétés spéciales sur lesquelles je désire attirer l'attention.

» Soit un plan dont les différents points représentent la variable imaginaire z, et, dans ce plan, le *cercle fondamental* dont le centre est l'origine et le rayon l'unité.

» On pourra tracer dans ce plan l'axe des quantités réelles Ox et une série de cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$, définis de la manière suivante :

» 1° Ils coupent tous le cercle fondamental orthogonalement.

» 2° Le cercle C_1 coupe Ox en α_1 et β_1 sous un angle $\frac{\lambda_1}{2}$.

» 3° Le cercle C_i coupe le cercle C_{i-1} en α_i et β_i sous un angle λ_i.

» 4° Le cercle C_n coupe Ox en α_{n+1} et β_{n+1} sous un angle $\frac{\lambda_{n+1}}{2}$.

» Je suppose que chacun des angles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ est une partie aliquote de 2π et que

$$(1) \qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \ldots + 2\lambda_n + \lambda_{n+1} < 2\pi(n-1).$$

Grâce à l'inégalité (1), il est toujours possible de tracer la figure que nous venons de définir.

» Cela posé, définissons $n+1$ fonctions de z, $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$, par les équations suivantes :

$$\frac{z_1 - \alpha_1}{z_1 - \beta_1} = e^{i\lambda_1}\left(\frac{z - \alpha_1}{z - \beta_1}\right),$$
$$\frac{z_2 - \alpha_2}{z_2 - \beta_2} = e^{i\lambda_2}\left(\frac{z - \alpha_2}{z - \beta_2}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{z_{n+1} - \alpha_{n+1}}{z_{n+1} - \beta_{n+1}} = e^{i\lambda_{n+1}}\left(\frac{z - \alpha_{n+1}}{z - \beta_{n+1}}\right).$$

» D'après la théorie générale des fonctions fuchsiennes, exposée dans un Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie dans la séance du 14 février 1881, il existera une infinité de fonctions $F(z)$, uniformes en z, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental, méromorphes à l'intérieur de ce cercle et jouissant de la propriété suivante :

$$F(z) = F(z_1) = F(z_2) = \ldots = F(z_n) = F(z_{n+1}).$$

» Entre deux quelconques de ces fonctions, dites *fonctions fuchsiennes*, il y a une relation algébrique. Si, de plus, on pose

$$x = \mathrm{F}(z), \quad y = \sqrt{\frac{d\mathrm{F}}{dz}},$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\varphi(x), \tag{2}$$

φ étant algébrique en x, de sorte que la fonction $\mathrm{F}(z)$ permettra d'intégrer l'équation (2).

» Quel sera le genre de la relation algébrique qui existe entre deux fonctions fuchsiennes quelconques?

» Soient u et v deux de ces fonctions et

$$f(u, v) = 0 \tag{3}$$

la relation qui les unit; soit enfin

$$\int \theta(u, v)\,du = \mathrm{G}(z)$$

une intégrale abélienne de première espèce dérivée de la relation (z). $\mathrm{G}(z)$ n'existera qu'à l'intérieur du cercle fondamental et sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle. On démontre que toutes les périodes doivent être nulles; la relation (z) est donc du genre 0 et toutes les fonctions fuchsiennes peuvent s'exprimer rationnellement par l'une d'entre elles. Nous achèverons de définir $\mathrm{F}(z)$ par les conditions suivantes :

» 1° $\mathrm{F}(z)$ sera l'une des fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement.

» 2° On aura

$$\mathrm{F}(\alpha_1) = 0, \quad \mathrm{F}(\alpha_2) = 1, \quad \mathrm{F}(\alpha_3) = \infty.$$

Il en résultera que, dans l'équation (2), φ sera rationnel en x et que les points singuliers de l'équation (2) seront

$$\mathrm{F}(\alpha_1),\ \mathrm{F}(\alpha_2),\ \ldots,\ \mathrm{F}(\alpha_n),\ \mathrm{F}(\alpha_{n+1}).$$

De plus, la fonction $\mathrm{F}(z)$ reste réelle tout le long des cercles $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n$, et, par conséquent, les points singuliers de l'équation (2) sont tous réels. Enfin on peut profiter des éléments qui restent indéterminés de telle sorte que $\mathrm{F}(\alpha_1), \mathrm{F}(\alpha_2), \ldots, \mathrm{F}(\alpha_{n+1})$ deviennent respectivement égaux à $n+1$ nombres réels quelconques donnés.

» Dans le cas particulier où $n = 2$, l'équation (2) se réduit à l'équation hypergéométrique de Gauss et $F(z)$ se réduit à cette fonction particulière sur laquelle j'ai appelé spécialement l'attention dans ma Note du 14 février et dont M. Halphen a fait ressortir les propriétés les plus importantes dans une Note insérée aux *Comptes rendus* le 4 avril 1881.

» Si, de plus, on suppose

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

la fonction

$$F\left(\frac{z+\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$$

se réduit à la fonction modulaire.

» Ne supposons plus $n = 2$, mais supposons

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0;$$

les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ seront rejetés sur le cercle fondamental. La fonction $F(z)$ ne pourra prendre, à l'intérieur de ce cercle, aucune des valeurs

$$F(\alpha_1),\ F(\alpha_2),\ \ldots,\ F(\alpha_{n+1}).$$

» Supposons donc une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x et dont les points singuliers soient

$$x = F(\alpha_1),\quad x = F(\alpha_2),\quad \ldots,\quad x = F(\alpha_{n+1}),$$

on y fera

$$x = F(z).$$

Les intégrales de l'équation proposée seront des fonctions zétafuchsiennes de z, qui n'existeront qu'à l'intérieur du cercle fondamental et seront holomorphes à l'intérieur de ce cercle.

» Cette méthode permet d'intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels toutes les fois que tous les points singuliers sont réels. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* Mémoire de M. L.-V. TURQUAN. (Extrait par l'auteur.)

« L'intégration de l'équation

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$