ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions abéliennes.*
Note de M. **H. Poincaré.**

« *Première remarque.* — Les $p$ équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Theta(x_1+\lambda_{1,1},\ x_2+\lambda_{2,1},\ \ldots,\ x_p\lambda_{p1})=0,\\ \Theta(x_1+\lambda_{1,2},\ x_2+\lambda_{2,2},\ \ldots,\ x_p\lambda_{p2})=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \Theta(x_1+\lambda_{1,p},\ x_2+\lambda_{2,p},\ \ldots,\ x_p\lambda_{pp})=0 \end{array}\right.$$

ont $1\times 2\times 3\times\ldots\times p$ solutions communes, outre celles qu'on en déduit par l'addition des périodes. Elles ne sont jamais impossibles. De plus, *en général,* on ne peut choisir les $\lambda$ de telle façon qu'elles cessent d'être distinctes. En supposant que la fonction $\Theta$ considérée doit son origine à un système d'intégrales abéliennes, je montre à quelle condition on pourra choisir les $\lambda$ de telle façon que les équations (1) cessent d'être distinctes.

» *Deuxième remarque.* — M. Picard, dans deux Notes du 21 février et du 7 mars, a montré que les fonctions abéliennes se ramènent, dans certains cas, aux fonctions elliptiques; de même les fonctions abéliennes peuvent, dans certains cas, se ramener à des fonctions abéliennes d'un moins grand nombre de variables. C'est ce qui donne l'explication d'une anomalie que j'avais remarquée.

» Une fonction $\Theta$ de $p$ variables dépend de $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres qui sont les périodes $\alpha_{ik}$. Or une relation de genre $p$,

$$f(x,y)=0,$$

peut être supposée de degré $p+1$ (Clebsch et Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen*). Elle dépend alors seulement de $4p+2$ paramètres.

» Supposons donc que, choisissant arbitrairement les $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres $\alpha_{ik}$, on forme une fonction $\Theta$, que j'appelle $\Theta_1$, et avec elle $p$ fonctions abéliennes à $2p$ périodes

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_p.$$

» Les équations

$$F_1=u,\quad F_2=F_3=\ldots=F_p=0$$

définissent $x_1$ en fonction de $u$; on aura

$$x_1 = \int \varphi(u, v)\, du,$$

$\varphi$ étant rationnel en $u$ et $v$, et $v$ étant lié à $u$ par une relation algébrique

$$f(u, v) = 0. \tag{2}$$

» Cette relation ne sera pas, en général, du genre $p$, puisqu'une relation algébrique du genre $p$ dépend de moins de $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres. Si donc on forme, par les procédés connus, le système d'intégrales abéliennes de première espèce qui correspondent à la relation (2), puis la fonction $\Theta$ correspondante, cette fonction $\Theta$ aura plus de $p$ variables, et pourtant elle devra se ramener à la fonction $\Theta_1$, qui n'en a que $p$. On voit donc là un des exemples de ces réductions, qui ont été étudiées par M. Picard.

» *Troisième remarque.* — Soit

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

une fonction abélienne à $p$ variables et $2p$ périodes. M. Appell substitue à la place de $u_i$ l'intégrale abélienne $u^{(i)}(x, y)$, et il arrive à ramener la fonction F à une fonction d'une seule variable. Cette fonction se décompose alors en éléments simples de la forme

$$A \frac{d}{du_k} L\, \Theta[u^{(i)}(x, y) + G_i].$$

» Bornons-nous au cas de deux variables; le résultat de M. Appell est susceptible d'être présenté sous une autre forme et en même temps d'être généralisé. Envisageons la fonction abélienne

$$F(u_1, u_2),$$

et supposons que $u_1$ et $u_2$ soient liés par la relation

$$\Theta(u_1 + \lambda_1, u_2 + \lambda_2) = 0.$$

F se décompose alors en éléments simples, qui sont de la forme

$$A \frac{d}{du_1} L\Theta(u_1 + G_1, u_2 + G_2) \quad \text{ou} \quad A' \frac{d}{du_2} L\Theta(u_1 + G'_1, u_2 + G'_2),$$

en supposant qu'il n'y ait pas d'infini multiple.

» Ce résultat n'est pas susceptible de généralisation dans le cas où il y a plus de deux variables. »