Donc *les fonctions* X, Y, Z *sont développables à l'intérieur de ce cercle suivant les puissances croissantes de* η. Ces développements ont les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
X(\eta) &= (-1)^{\frac{1}{m}} + a_1\eta^p + a_2\eta^{2p} + a_3\eta^{3p} + \ldots,\\
Y(\eta) &= 1 + b_1\eta^p + b_2\eta^{2p} + b_3\eta^{3p} + \ldots,\\
Z(\eta) &= \eta + c_1\eta^{p+1} + c_2\eta^{2p+1} + c_3\eta^{3p+1} + \ldots.
\end{aligned}$$

Ils peuvent être calculés, terme par terme, au moyen des formules (5) et (6). Ils sont propres à représenter toutes les valeurs de x.

» Dans une prochaine Communication, je dirai quelles sont les propriétés et quel usage on peut faire de ces nouvelles fonctions, comment on peut encore les généraliser en prenant pour point de départ d'autres équations linéaires du second ordre; je montrerai aussi les liens intimes qui unissent mes recherches à celles dont M. Poincaré a donné un résumé si remarquable dans des Communications récentes (14 et 21 février). »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une nouvelle application et quelques propriétés importantes des fonctions fuchsiennes.* Note de M. **H. Poincaré**.

« Considérons un groupe fuchsien G quelconque et les différentes fonctions fuchsiennes qui correspondent à ce groupe. Je suppose que G soit tel que toutes ces fonctions fuchsiennes n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Toutes ces fonctions fuchsiennes seront liées par des équations algébriques et seront fonctions rationnelles de deux d'entre elles, que j'appellerai x et y, et entre lesquelles il y aura une relation algébrique

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

» Si l'on pose

$$t_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}}, \quad t_2 = z\sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

(z étant l'argument des fonctions fuchsiennes), t_1 et t_2 seront les intégrales d'une équation linéaire

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \varphi(x, y)t, \tag{2}$$

φ étant rationnel en x et y.

» Envisageons une intégrale abélienne de première espèce

$$u(x, y).$$

Remplaçons-y x et y par leurs valeurs en fonction de z; u deviendra holomorphe en z et pourra, par conséquent, être représenté à l'intérieur du cercle fondamental par une série ordonnée suivant les puissances de z. L'emploi des fonctions fuchsiennes nous donne donc l'intégrale u sous la forme suivante,

$$u = \theta_1(z), \quad x = \frac{\theta_2(z)}{\theta_3(z)},$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ étant des séries ordonnées suivant les puissances de z et toujours convergentes.

» Quand z subit une opération quelconque du groupe G, le point (x, y) décrit un cycle, et, par conséquent, u augmente d'une période. Considérons le groupe des opérations qui consistent à augmenter u d'une période. Ce groupe, d'après ce qui précède, *devra être isomorphe au groupe* G.

» *Si, par conséquent, le groupe* G *est dérivé de moins de* $2p+2$ *opérations, l'intégrale* u *ne pourra avoir* $2p+2$ *périodes distinctes, et, par conséquent, la relation* (1) *sera au plus du genre* p.

» Cette limite peut, le plus souvent, être abaissée, car, pour que l'isomorphisme dont j'ai parlé plus haut puisse avoir lieu, il faut, dans certains cas, qu'il y ait entre les périodes de u certaines relations linéaires, de sorte que ces périodes cessent d'être distinctes.

» C'est ainsi que la relation (1) peut être du genre zéro, bien que le groupe G soit dérivé d'un nombre quelconque d'opérations.

» Par conséquent, les fonctions fuchsiennes permettent d'intégrer une infinité d'équations telles que (2), où φ est rationnel en x, et non plus seulement en x et en y; bien que ces équations présentent un nombre quelconque de points singuliers.

» Ainsi, si a, b, c et les coefficients sont convenablement choisis, si la différence des racines des équations déterminantes relatives à chacun des points singuliers

$$a, \; b, \; c, \; \infty$$

est une partie aliquote de l'unité, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{\mathrm{A}}{(x-a)^2} + \frac{\mathrm{A}'}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{(x-b)^2} + \frac{\mathrm{B}'}{x-b} + \frac{\mathrm{C}}{(x-c)^2} + \frac{\mathrm{C}'}{x-c}\right]$$

est intégrable à l'aide des équations fuchsiennes.

» Je citerai aussi, parmi les équations intégrables à l'aide des fonctions fuchsiennes, certaines équations à coefficients doublement périodiques. M. Picard a démontré que ces équations s'intégraient par les fonctions elliptiques toutes les fois qu'il n'y a d'autre point singulier que des pôles. Elles s'intégreront par les fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes s'il n'y a que des pôles et un point critique algébrique. Elles s'intégreront aussi à certaines conditions quand même il y aurait plus d'un point critique algébrique.

» Nous avons trouvé plus haut une limite supérieure du genre de la relation (1). D'autres considérations fournissent une limite inférieure. Dans tous les exemples que j'ai eu l'occasion d'étudier jusqu'ici, ces deux limites coïncident, de sorte que l'on connaît exactement le genre de la relation (1). Tout ce qui précède, je le répète, ne s'applique qu'à celles des fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental. »

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Sur les relations entre les taches solaires et les variations magnétiques*. Lettre de M. **R. Wolf** à M. Janssen.

« Je viens de compléter ma statistique solaire pour l'année 1880.

» L'année 1880 est la trente-quatrième de mes observations solaires, la cent-trente-deuxième de ma série des nombres relatifs mensuels et la deux-cent-soixante-dixième de la période pour laquelle j'ai établi les époques de maximum et de minimum et le cycle de $11\frac{1}{9}$. Elle est caractérisée par le Tableau suivant, dans lequel n désigne le nombre de jours où le Soleil a été vu sans taches par une lunette de 5 pieds, avec un grossissement de 64, r le nombre relatif moyen déduit de la fréquence et de la grandeur des taches, et Δv l'augmentation de la variation magnétique en déclinaison depuis l'année précédente :

1880.	n.	r.	Δv.
Janvier	7	24,0	0',03
Février	6	27,5	0,83
Mars	5	19,3	0,61
Avril	2	19,5	2,19
Mai	4	23,5	0,15
Juin	0	34,1	0,59
Juillet	5	21,9	0,79
Août	0	48,1	0,56
Septembre	0	66,0	1,76
Octobre	0	43,0	2,19
Novembre	3	30,7	1,70
Décembre	1	29,6	0,49
Année	33	32,3	0,99