considérable, à l'extrémité des corps pointus ou saillants, comme les javelots ou les piques des soldats sous les armes, le sommet des mâts des navires, les branches des arbres, etc. Dans les faits que j'ai observés, il y avait, autour de la tige des paratonnerres (car il ne me paraît pas douteux que le phénomène s'accomplissait sur ceux de l'Entrepôt les plus rapprochés de moi), une colonnette lumineuse, qui se terminait par un épanouissement de la lumière dans quelques cas, ou qui, dans d'autres cas, se courbant à angle droit, dirigeait sa pointe vers celle d'une autre colonnette qui se comportait de la même manière; les deux lumières, avançant l'une vers l'autre, s'éteignaient sans s'être réunies. Ces caractères, différents de ceux des *feux Saint-Elme*, peuvent être dus à la fois à une plus grande intensité de l'effluve électrique et à la qualité plus parfaite des conducteurs. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la représentation des nombres par les formes.* Mémoire de M. **H. Poincaré**, présenté par M. Hermite. (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires : MM. Bertrand, Hermite, Bonnet.)

« On sait trouver toutes les représentations d'un nombre entier N par une forme quadratique binaire $F(x, y)$, c'est-à-dire tous les nombres entiers a et b tels que

$$F(a, b) = N.$$

Mais, en ce qui concerne les formes binaires d'ordre quelconque, le problème correspondant n'est pas encore résolu, bien que la solution soit contenue en germe dans les travaux de MM. Eisenstein, Hermite, Kummer et Dedekind. J'en donne, dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, une solution complète, non seulement pour les formes binaires, mais pour toutes les formes décomposables en facteurs linéaires.

» 1. Soit une équation algébrique

$$x^m - A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} - \ldots \pm A_1 x \mp A_0 = 0,$$

dont les racines sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

» J'envisage la forme

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1 + x_2\alpha_1 + x_3\alpha_1^2 + \ldots + x_m\alpha_1^{m-1}) \\ \times (x_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_2^{m-1}) \ldots \\ \times (x_1 + x_2\alpha_m + \ldots + x_m\alpha_m^{m-1}), \end{aligned}$$

et je cherche des nombres entiers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ tels que

$$F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) = N,$$

N étant un entier donné.

» Je montre que ce problème (grâce aux travaux de MM. Hermite et Dedekind) se ramène au suivant : *Former tous les nombres complexes idéaux de norme* N. Pour résoudre ce nouveau problème, je fais voir qu'il suffit d'étudier les diverses congruences

$$x^m - A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} - \ldots \pm A_1 x \mp A_0 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

où μ est un diviseur quelconque de N.

» Incidemment, je montre quelle est la manière de former tous les idéaux premiers et leurs puissances, de multiplier entre eux deux idéaux, de décomposer un idéal en facteurs premiers, etc.

» 2. J'envisage une forme binaire quelconque

$$F(x, y) = B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1}y + \ldots + B_1 xy^{m-1} + B_0 y^m,$$

et je me propose de trouver deux entiers a et b tels que $F(a, b) = N$.

» Soit

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = x^m + B_{m-1}x^{m-1}y \\ + B_m B_{m-2}x^{m-2}y + \ldots + B_m^{m-2}B_1 xy^{m-1} + B_m^{m-1}B_0 y^m. \end{aligned}$$

» S'il existe deux entiers A et B tels que $\Phi(A, B) = NB_m^{n-1}$, si $A = aB_m$, a étant un entier, on aura

$$F(a, B) = N.$$

» D'ailleurs, on obtiendra de la sorte toutes les représentations de N par F. Le problème de la représentation des nombres par une forme binaire quelconque est donc ramené à celui de la représentation des nombres par les formes telles que Φ, c'est-à-dire par les formes binaires dont le premier coefficient est l'unité.

» 3. Soit

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = x^m + A_{m-1}x^{m-1}y + \ldots + A_1 xy^{m-1} + A_0 y^m \\ = (x + \alpha_1 y)(x + \alpha_2 y) \ldots (x + \alpha_m y). \end{aligned}$$

Trouver deux entiers a et b tels que

$$\Phi(a, b) = \mathrm{N}.$$

» On considérera la congruence

$$\xi^m - \mathrm{A}_{m-1}\xi^{m-1} + \mathrm{A}_{m-2}\xi^{m-2} - \ldots \pm \mathrm{A}_1\xi \mp \mathrm{A}_0 \equiv 0 \pmod{\mathrm{N}}.$$

» Soit ξ l'une de ses racines. On envisagera les deux formes

$$\begin{aligned}\psi = \mathrm{N}(y_1 + \alpha_1 y_2 + \ldots + \alpha_1^{m-1} y_m)(y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_2^{m-1} y_m)\ldots \\ \times (y_1 + \alpha_m y_2 + \ldots + \alpha_m^{m-1} y_m),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta = &[\mathrm{N}x_1 + (\alpha_1 - \xi)(x_2 + x_3\alpha_1 + \ldots + \alpha_1^{m-2} x_m)] \\ &\times [\mathrm{N}x_1 + (\alpha_2 - \xi)(x_2 + \ldots + \alpha_2^{m-2} x_m)]\ldots \\ &\times [\mathrm{N}x_1 + (\alpha_m - \xi)(x_2 + x_3\alpha_m + \ldots + \alpha_m^{m-2} x_m)].\end{aligned}$$

» Supposons qu'on ait reconnu, par la méthode de M. Hermite, que ces deux formes sont équivalentes et qu'on passe de l'une à l'autre en posant

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_{1,1} y_1 + \lambda_{1,2} y_2 + \ldots + \lambda_{1,m} y_m, \\ x_2 &= \lambda_{2,2} y_1 + \lambda_{2,2} y_2 + \ldots + \lambda_{2,m} y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m &= \lambda_{m,1} y_1 + \lambda_{m,2} y_2 + \ldots + \lambda_{m,m} y_m.\end{aligned}$$

Si l'on a

$$\lambda_{3,1} = \lambda_{4,1} = \ldots = \lambda_{m,1} = 0,$$

on aura

$$\Phi(\mathrm{N}\lambda_{1,1} - \xi\lambda_{2,1}, \lambda_{2,1}) = \mathrm{N},$$

et l'on obtiendra de la sorte toutes les représentations de N par Φ.

» Pour résoudre ce problème, il suffit donc : 1° de résoudre une congruence; 2° de rechercher, par la méthode de M. Hermite, si deux formes décomposables en facteurs linéaires sont équivalentes. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe d'équations différentielles linéaires.* Note de M. **Halphen**, présentée par M. Hermite.

(Commissaires : MM. Bertrand, Hermite, Bonnet.)

« Outre les équations différentielles linéaires à coefficients constants et celles qui ont la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\mathrm{A}_m(ax+b)^m \frac{d^m y}{dx^m} + \mathrm{A}_{m-1}(ax+b)^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} \\ &\qquad + \mathrm{A}_{m-2}(ax+b)^{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots = 0,\end{aligned}\right.$$