

ÉCONOMIQUE ET MÉCANIQUE

PAR

Léon WALRAS

« Il me semble dit excellemment Jevons au chapitre 1 formant l' *Introduction* de sa THÉORIE DE L'ÉCONOMIE POLITIQUE, dans le paragraphe intitulé : *Caractère mathématique de la science, que notre science doit être mathématique tout simplement parce qu'elle traite de quantités*. Dès que les choses dont une science s'occupe sont susceptibles de *plus* ou de *moins*, leurs rapports et leurs lois sont de nature mathématique. Les lois ordinaires de l'offre et de la demande traitent entièrement de quantités de marchandises demandées ou offertes et expriment la manière suivant laquelle ces quantités varient avec les prix. En conséquence de quoi, ces lois *sont* mathématiques. Les économistes ne sauraient changer leur nature en leur déniaut leur nom ; ils pourraient aussi bien essayer de changer la lumière rouge en l'appelant bleue. Que les lois mathématiques de l'économie soient formulées en mots ou dans les symboles habituels x, y, z, p, q , etc., c'est un accident et une question de pure convenance. Si nous n'avons nul égard à l'embarras et à la prolixité, les problèmes mathématiques les plus compliqués pourraient être abordés dans le langage ordinaire et leur solution poursuivie et énoncée avec des mots. »

Jevons fait suivre ce paragraphe de trois autres intitulés respectivement : *Confusion entre les sciences mathématiques et les sciences exactes* — *Possibilité d'une mesure exacte* — *Mesure des sentiments et motifs*, très judicieux aussi, mais auxquels je me permettrai de substituer la brève distinction suivante.

Il faut distinguer les faits mathématiques en deux catégories.

Les uns sont *extérieurs* ; ils se passent en dehors de nous, sur le théâtre de la nature. Il en résulte qu'ils apparaissent à tout le monde, et à tout le monde de la même manière, et aussi qu'il y a, pour chacun d'eux, une *unité* objective et collective, c'est-à-dire une grandeur, la même pour tout le monde, qui sert à les mesurer. Nous les appellerons les faits *physiques* ; et ils seront les objets des sciences *physico-mathématiques*.

Les autres sont *intimes* ; ils se passent en nous, notre for intérieur en est le théâtre. D'où il résulte qu'ils n'apparaissent pas aux autres comme à nous et que si chacun de nous peut les comparer entre eux sous le rapport de la grandeur, soit de l'intensité, les estimer plus grands ou plus intenses les uns que les autres, en un mot les *apprécier*, cette appréciation demeure subjective et individuelle. Nous les appellerons les faits *psychiques* ; et ils seront les objets des sciences *psychico-mathématiques*.

La *mécanique*, l'*astronomie* appartiennent à la première catégorie ; l'*économique* appartient à la seconde ; et, à supposer qu'elle serait la première de son espèce, elle ne sera probablement pas la dernière.

Cela posé, il semble que nous puissions avancer.

La *richesse sociale* est l'ensemble des choses qui sont à la fois *utiles* et *limitées en quantité* et qui, pour cette raison, sont : 1° *appropriables*, 2° *valables et échangeables*, et 3° *industriellement productibles*. De ces trois faits ou circonstances, le second, soit la *valeur d'échange*, ou la propriété qu'ont les choses faisant partie de la richesse sociale de s'échanger les unes contre les autres en certaines proportions déterminées de quantité, est incontestablement un fait mathématique. Et l'économique pure, dont il est l'objet, est une science mathématique.

Mais la théorie d'un fait général comprend, outre l'indi-

cation de son objet ou de sa nature, la recherche de son origine ou de sa cause, l'énumération de ses espèces, l'énonciation de ses lois et l'indication de ses conséquences. Or quand l'économique veut s'acquitter de sa tâche en disant quelle est la cause du fait de la valeur d'échange et prétend la trouver, grâce à la méthode mathématique, dans la *rareté* ou l'*intensité du dernier besoin satisfait*, les économistes non-mathématiciens se récrient, et même des mathématiciens refusent d'accepter « qu'une satisfaction puisse être mesurée ¹. »

Avec les premiers il serait oiseux de discuter : eux et nous ne parlons pas la même langue. Mais avec les mathématiciens il en est autrement : nous pouvons nous expliquer et peut-être nous entendre.

Le *besoin* que nous avons des choses, ou l'*utilité* qu'ont les choses pour nous, leur dirai-je, est un fait quantitatif qui se passe en nous ; c'est un fait intime dont l'appréciation reste subjective et individuelle. Soit ! Ce n'en est pas moins une grandeur et même, dirai-je, une grandeur appréciable. De deux choses utiles dont j'ai besoin et que je ne saurais obtenir gratuitement à discrétion, je sais fort bien laquelle m'est le plus utile ou de laquelle j'ai le plus grand besoin. C'est celle que je préfère à l'autre ². Que ma préférence soit ou non justifiée au regard de la morale, ou même dans mon intérêt bien entendu, ce n'est pas la question. La *morale* est une science distincte, et il pourrait y en avoir une autre encore, celle du bonheur ou l'*hédonique*, qui nous enseignerait les moyens d'être heureux ; mais ce n'est pas de cela qu'il s'agit ici. Il s'agit ici de la détermination des prix en libre concurrence et de savoir comment elle dépend de nos préférences justifiées ou non. C'est exclusivement cette question qui est l'objet de l'*éco-*

¹ H. LAURENT. *Bulletin de l'institut des actuaires français*. Juillet 1900, p. 84.

² Expression de M. H. Poincaré, dans sa lettre de 1901 que l'on trouvera en *appendice*.

nomique pure. L'économique pure ne sera pas, si l'on veut, une science *physico-mathématique* ; eh ! bien elle sera une science *psychico-mathématique*. Et il me semble facile de faire voir aux mathématiciens, par deux exemples décisifs, que sa manière de procéder est rigoureusement identique à celle de deux sciences physico-mathématiques des plus avancées et des plus incontestées : la *mécanique rationnelle* et la *mécanique céleste*. Quand nous serons d'accord sur ce point, le procès sera jugé.

II

(A) et (B) étant deux marchandises sur le marché,

$$u_a = \varphi_a(q_a), \qquad u_b = \varphi_b(q_b),$$

étant les équations d'*utilité*, non proportionnellement croissante avec la *quantité consommée*, de ces marchandises pour un échangeur,

$$r_a = \frac{d\varphi_a(q_a)}{dq_a} = \varphi'_a(q_a), \qquad r_b = \frac{d\varphi_b(q_b)}{dq_b} = \varphi'_b(q_b)$$

étant les équations de *rareté* (*intensité du dernier besoin satisfait*), décroissante avec la quantité consommée, nous posons l'équation d'utilité maxima

$$\frac{d\varphi_a(q_a)}{dq_a} \cdot dq_a + \frac{d\varphi_b(q_b)}{dq_b} \cdot dq_b = 0,$$

soit l'équation de *demande* ou *d'offre*

$$r_a \cdot dq_a + r_b \cdot dq_b = 0 \qquad (1)$$

comme l'équation différentielle fondamentale de l'économique pure.

Or, les marchandises (A) et (B) étant supposées s'échan-

ger suivant les valeurs respectives v_a et v_b on a l'équation d'échange

$$v_a \cdot dq_a + v_b \cdot dq_b = 0 \quad (2)$$

et l'on tire, par une élimination facile des deux différentielles,

$$\frac{r_b}{r_a} = \frac{v_b}{v_a}.$$

Donc : *La satisfaction maxima a lieu par la proportionnalité des raretés aux valeurs.*

Voyons à présent comment procède la mécanique rationnelle

Observons d'abord, ainsi que le fait Cournot ¹, que, si on prend pour mesure de la force, non pas la force *morte* avec Newton et tous les géomètres français du XVIII^e siècle, y compris Lagrange, mais avec Leibnitz la force *vive*, c'est-à-dire la force multipliée par sa *vitesse*, l'équation différentielle fondamentale de la mécanique rationnelle

$$P \cdot \frac{dp}{dt} + Q \cdot \frac{dq}{dt} = 0$$

apparaîtra, non comme une sorte de postulat, mais comme l'expression naturelle et nécessaire de l'égalité, à un instant donné, de deux forces vives s'exerçant sur un point en sens contraire. Alors, étant donnée une machine, telle que la balance romaine, par exemple, dans laquelle, en vertu des liaisons du système,

$$\varepsilon_p = \varphi(p) = \int_0^p \varphi'(p) dp, \quad \varepsilon_q = \varphi(q) = \int_0^q \varphi'(q) dq$$

soient, aux extrémités des deux bras de levier, les équations

¹ *Matérialisme, Vitalisme, Rationalisme*, 1875, pp. 16, 17 et 18.

tions d'énergie proportionnellement croissante avec les espaces p et q ;

$$P = \frac{d\varphi(p)}{dp} = \varphi'(p), \quad Q = \frac{d\varphi(q)}{dq} = \varphi'(q)$$

les équations de *force*, ou d'énergie limite, constante avec les mêmes espaces, la mécanique rationnelle peut poser l'équation d'énergie maxima

$$\frac{d\varphi(p)}{dp} \cdot dp + \frac{d\varphi(q)}{dq} \cdot dq = 0,$$

soit l'équation d'équilibre

$$P \cdot dp + Q \cdot dq = 0 \quad (1)$$

conformément à son équation différentielle fondamentale.

Or, si on suppose les bras de levier ayant des longueurs respectives p et q , on obtient aisément l'équation

$$p \cdot dq + q \cdot dp = 0 \quad (2)$$

et l'élimination des différentielles donne

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}.$$

C'est-à-dire que : *L'équilibre de la romaine a lieu par la proportionnalité inverse des forces aux bras de levier.*

L'analogie est évidente. Aussi a-t-on déjà signalé celle des *forces* et des *raretés* comme *vecteurs*, d'une part, et celle des *énergies* et des *utilités* comme *quantités scalaires*, d'autre part ¹.

¹ IRVING FISHER. *Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices*. 1892, p. 85.

III

Eh bien, la même analogie existe entre l'économique et la mécanique céleste.

En économie, nous démontrons que : *L'équilibre général du marché n'a lieu que si le prix de deux marchandises quelconques l'une en l'autre est égal au rapport des prix de l'une et l'autre en une troisième quelconque suivant la formule*

$$p_{c,b} = \frac{v_c}{v_b} = \frac{p_{c,a}}{p_{b,a}} = \frac{\frac{v_c}{v_a}}{\frac{v_b}{v_a}},$$

ce qu'on exprime parfois en disant que chacune des marchandises (A), (B), (C)... n'a qu'une seule et même valeur par rapport à toutes les autres.

D'autre part, nous démontrons que les prix de toutes les marchandises (B), (C), (D)... étant énoncés en l'une d'entre elles (A) prise pour numéraire : *Lorsque le marché est à l'état d'équilibre général, le rapport des raretés de deux marchandises quelconques, égal au prix de l'une en l'autre, est le même chez tous les détenteurs de ces deux marchandises suivant les équations :*

$$p_b = \frac{r_{b,1}}{r_{a,1}} = \frac{r_{b,2}}{r_{a,2}} = \frac{r_{b,3}}{r_{a,3}} = \dots$$

$$p_c = \frac{r_{c,1}}{r_{a,1}} = \frac{r_{c,2}}{r_{a,2}} = \frac{r_{c,3}}{r_{a,3}} = \dots$$

$$p_d = \frac{r_{d,1}}{r_{a,1}} = \frac{r_{d,2}}{r_{a,2}} = \frac{r_{d,3}}{r_{a,3}} = \dots$$

.

ce qu'on peut aussi indiquer de cette manière :

$$\begin{array}{ccccccc}
 v_a & : & v_b & : & v_c & : & v_d & : & \dots \\
 :: & r_{a,1} & : & r_{b,1} & : & r_{c,1} & : & r_{d,1} & : & \dots \\
 :: & r_{a,2} & : & r_{b,2} & : & r_{c,2} & : & r_{d,2} & : & \dots \\
 :: & r_{a,3} & : & r_{b,3} & : & r_{c,3} & : & r_{d,3} & : & \dots \\
 :: & . & . & . & . & . & . & . & . & .
 \end{array}$$

soit en disant que : *A l'état d'équilibre général les valeurs sont proportionnelles aux raretés.*

Et enfin, n, p, \dots étant les quantités de (B), (C)... susceptibles de s'échanger contre une quantité m de (A) nous posons les équations

$$m v_a = n v_b = p v_c = \dots$$

soit, en prenant v_a pour unité de valeur, les équations :

$$m = n p_b = p p_c = \dots$$

indiquant l'état virtuel du marché au point de vue de l'échange.

En astronomie, on constate que : *Trois corps célestes étant donnés, (T), (L), et (S), ils gravitent les uns vers les autres d'un mouvement uniformément accéléré, analogue à celui de la chute des corps selon la loi de la pesanteur :*

$$e = \frac{gt^2}{2},$$

savoir (T) et (L) suivant des équations d'où l'on tire aisément

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_t} = \frac{e_1}{e_t},$$

(T) et (S) suivant des équations d'où l'on tire

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_t} = \frac{e_s}{e_t},$$

(L) et (S) suivant des équations d'où l'on tire

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_l} = \frac{e_s}{e_l},$$

avec la condition complémentaire :

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_l} = \frac{\frac{\gamma_s}{\gamma_t}}{\frac{\gamma_l}{\gamma_t}} \quad ^1$$

ce qui permet de faire entrer en scène les *masses* inversement proportionnelles aux *accélérations* suivant les équations :

$$\gamma_t m_t = \gamma_l m_l = \gamma_s m_s = \dots$$

de dire, si l'on veut, que chacun des corps célestes (T), (L), (S)... n'a qu'une seule et même masse par rapport à tous les autres, et enfin, en prenant m_t pour unité de masse, de poser les équations :

$$\gamma_t = \gamma_l \mu_l = \gamma_s \mu_s = \dots$$

indiquant l'état virtuel du monde au point de vue de la *gravitation*.

Je renvoie à nos ouvrages pour la suite de l'économique; mais je ne résiste pas au désir de rappeler comment se poursuit ici la mécanique céleste.

¹ Voyez EMILE PICARD. *La Science moderne et son état actuel*, p. 106. L'auteur est bien disposé en faveur de l'application des mathématiques à l'économie politique, v. pp. 45, 46.

Qu'on pose pour deux corps quelconques, (T) et (L) par exemple, en désignant par k une quantité constante et générale, et en introduisant la circonstance essentielle de *l'attraction inverse au carré des distances*, la formule d'attraction réciproque

$$a_t = a_l = \frac{km_t m_l}{d_{t,l}^2},$$

on pourra énoncer que : *Les corps célestes s'attirent les uns les autres en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances*, ce qui est la loi newtonienne de l'attraction universelle.

La détermination numérique de la constante générale k est tout particulièrement décisive au point de vue de la valeur de la méthode mathématique dans les sciences de faits et de rapports quantitatifs et est, à juste titre, célèbre dans l'histoire de la science.

Elle se fait de la façon suivante :

Qu'on pose aussi *l'accélération* d'un corps céleste comme égale à la *force d'attraction* qui agit sur lui divisée par sa *masse*, soit respectivement pour la Terre et la Lune :

$$\gamma_t = \frac{a_l}{m_t} = \frac{km_l m_t}{m_t} = km_l,$$

$$\gamma_l = \frac{a_t}{m_l} = \frac{km_t m_l}{m_l} = km_t,$$

double équation qui formule la loi de *l'égalité de l'action et de la réaction* et celle de la *proportionnalité exclusive de l'accélération du corps attiré à la masse du corps attirant*.

Cela fait, qu'on prenne la masse de la terre, m_t , pour unité de masse, le rayon de la terre, r , pour unité de dis-

¹ Voyez H. POINCARÉ. *La Science et l'hypothèse*, p. 124.

tance ; et qu'on suppose les masses de la terre et de la lune concentrées à leur centres.

L'observation est en état de reconnaître que, à la distance de 60^r3, la lune tend à tomber vers la terre de 0^m00136 en une seconde, autrement dit que son accélération est de 0^m00272. A la distance de 1^r, cette accélération serait $60.3^2 = 3626$ fois plus forte, soit de 9^m8.

Ainsi, il est démontré que le coefficient général k n'est autre chose que le g des physiciens, que le coefficient de la chute des corps est celui de la gravitation universelle, et l'astronomie moderne est fondée.

IV

Qu'on examine maintenant aussi attentivement qu'on voudra les quatre théories ci-dessus : la théorie de la satisfaction maxima de l'échangeur et celle de l'énergie maxima de la romaine, la théorie de l'équilibre général du marché et celle de l'équilibre universel des corps célestes, on ne trouvera, entre les deux théories mécaniques d'une part et les deux théories économiques d'autre part, que cette seule et unique différence : l'*extériorité* des deux phénomènes mécaniques et l'*intimité* des deux phénomènes économiques, et, par suite, la possibilité de rendre tout un chacun témoin des conditions de l'équilibre de la romaine et des conditions de l'équilibre universel du ciel, grâce à l'existence de communes mesures pour ces conditions *physiques*, et l'impossibilité de manifester à tous les yeux les conditions de l'équilibre de l'échange et les conditions de l'équilibre général du marché, faute de communes mesures pour ces conditions *psychiques*. On a des mètres et des centimètres pour constater la longueur des bras de levier de la romaine, des grammes et des kilogrammes pour constater le poids que supportent ces bras ; on a des instruments pour déterminer la chute des astres les uns vers les autres.

On n'en a pas pour mesurer les intensités des besoins chez les échangeurs. Mais qu'importe puisque chaque échangeur se charge d'opérer lui-même, consciemment ou inconsciemment, cette mesure et de décider en son for intérieur si ses derniers besoins satisfaits sont ou non proportionnels aux valeurs des marchandises ? Que la mesure soit extérieure ou qu'elle soit intime, en raison de ce que les faits à mesurer sont physiques ou psychiques, cela n'empêche pas qu'il y ait *mesure*, c'est-à-dire comparaison de *quantités* et *rappports quantitatifs*, et que, en conséquence, la science soit *mathématique*.

Ce n'est pas tout ; et, puisque je me suis aventuré sur ce terrain, je me permettrai de rendre nos contradicteurs mathématiciens attentifs à la gravité de cette question de la mesure des quantités physico-mathématiques elles-mêmes telles que les *forces*, les *énergies*, les *attractions*, les *masses*, etc. Naguère encore de savants mathématiciens n'hésitaient pas à définir la masse d'un corps « le nombre de molécules » ou « la quantité de matière » qu'il renferme ¹; et peut-être ne pourra-t-on, d'ici à quelques temps, enseigner la théorie de la gravitation universelle aux jeunes gens qu'en leur permettant de se représenter toutes les molécules, en nombre m , d'un corps céleste comme reliées chacune à toutes les molécules, en nombre m' , d'un autre par une force d'intensité k variant en raison inverse du carré de la distance d , de telle sorte qu'il en résulte pour les deux corps une attraction réciproque $\frac{k m m'}{d^2}$. Mais, pourtant, nous n'en sommes plus là ! Un des maîtres de la science moderne, après avoir cité et critiqué les essais de définition de la *masse* par Newton, par Thomson et Tait, de la *force* par Lagrange, par Kirchhoff, conclut que : *les masses sont des coefficients qu'il est commode d'introduire*

¹ POINSON. *Statique*, 8^e édition, p. 178.

dans les calculs ¹. A la bonne heure ! Voilà qui est parler net et qui m'encourage à me demander si tous ces concepts, ceux de *masses* et de *forces* aussi bien que ceux d'*utilités* et de *raretés* ne seraient pas tout simplement des noms donnés à des causes hypothétiques qu'il serait indispensable et légitime de faire figurer dans les calculs en vue de les rattacher à leurs effets si l'on veut élaborer les sciences physico ou psychico-mathématiques avec la précision et la concision et dans la forme rigoureuse et claire du langage mathématique. Les *forces* seraient ainsi des causes d'*espace parcouru*, les *masses* des causes de *temps employé au parcours* desquelles résulterait la *vitesse* dans le *mouvement*, des causes physiques plus constantes mais plus cachées ; les *utilités* et les *raretés* seraient des causes de *demande* et d'*offre*, desquelles résulterait la *valeur* dans l'*échange*, des causes psychiques plus sensibles mais plus variables. Les mathématiques seraient la langue spéciale pour parler des faits quantitatifs, et il irait de soi que l'économie est une science mathématique au même titre que la mécanique et l'astronomie.

LÉON WALRAS

¹ H. POINCARÉ. *La Science et l'hypothèse*, pp. 119-127. Ce n'est pas M. Poincaré qui nous interdirait d'apprécier nos satisfactions. Il dit (*La valeur de la science*, p. 145) que Maxwell était habitué à « penser en vecteurs ». Eh ! bien, nous, nous nous habituons à « penser en raretés » qui sont précisément des vecteurs.

Lettre de M. H. Poincaré à M. Léon Walras ¹.

Mon cher collègue,

Vous vous êtes mépris sur ma pensée. Je n'ai jamais voulu dire que vous eussiez dépassé les « justes limites ». Votre définition de la rareté me paraît légitime. Voici comment je la justifierais. La satisfaction peut-elle se mesurer? Je puis dire que telle satisfaction est plus grande que telle autre, puisque je préfère l'une à l'autre. Mais je ne puis dire que telle satisfaction est deux fois ou trois fois plus grande que telle autre. Cela n'a aucun sens par soi-même et ne pourrait en acquérir un que par une convention arbitraire.

La satisfaction est donc une grandeur, mais non une grandeur mesurable. Maintenant, une grandeur non-mesurable sera-t-elle par cela seul exclue de toute spéculation mathématique? Nullement. La température par exemple (au moins jusqu'à l'avènement de la thermodynamique qui a donné un sens au mot de température absolue) était une grandeur non-mesurable. C'est arbitrairement qu'on la définissait et la mesurait par la dilatation du mercure. On aurait pu tout aussi légitimement la définir par la dilatation de tout autre corps et la mesurer par une fonction quelconque de cette dilatation pourvu que *cette fonction fût constamment croissante*. De même ici vous pouvez définir la satisfaction par une fonction arbitraire pourvu que cette fonction croisse toujours en même temps que la satisfaction qu'elle représente.

Dans vos prémisses vont donc figurer un certain nombre de fonctions arbitraires; mais une fois ces prémisses posées, vous avez le droit d'en tirer des conséquences par le calcul; si, dans ces conséquences, les fonctions arbitraires figurent encore, ces conséquences ne seront pas fausses, mais elles seront dénuées de tout intérêt parce qu'elles seront subordonnées aux conventions arbitraires faites au début. Vous devez donc vous efforcer d'*éliminer* ces fonctions arbitraires, et c'est ce que vous faites.

¹ Sur les *Eléments d'économie politique pure*, 4^e éd. Reçue le 1^{er} octobre 9110.L. W.

Autre remarque : je puis dire si la satisfaction qu'éprouve un même individu est plus grande dans telle circonstance que dans telle autre; mais je n'ai aucun moyen de comparer les satisfactions éprouvées par deux individus différents. Cela augmente encore le nombre des fonctions arbitraires à éliminer.

Quand donc j'ai parlé des « justes limites », cela n'est pas du tout ce que j'ai voulu dire. J'ai pensé qu'au début de toute spéculation mathématique il y a des hypothèses et que, pour que cette spéculation soit fructueuse, il faut (comme dans les applications à la physique d'ailleurs) qu'on se rende compte de ces hypothèses. C'est si on oublie cette condition qu'on franchirait les justes limites.

Par exemple, en mécanique, on néglige souvent le frottement et on regarde les corps comme infiniment polis. Vous, vous regardez les hommes comme infiniment égoïstes et infiniment clairvoyants. La première hypothèse peut être admise dans une première approximation, mais la deuxième nécessiterait peut-être quelques réserves ¹.

Votre bien dévoué collègue,

POINCARÉ.

¹ Il me semble que le dernier alinéa de mon § 1 répond à cette observation.
L. W.



