CORRESPONDANCE D'HENRI POINCARÉ ET DE FELIX KLEIN.

La Correspondance que nous publierons ici intéressera tous les géomètres comme un document humain. On éprouve un sentiment de réconfort à suivre la lutte, à armes courtoises, dont parlera Poincaré dans une de ses lettres. Dans l'édition allemande de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques on vient de tracer l'histoire de la théorie des fonctions automorphes. Les pages suivantes sont de nature à y ajouter quelque chose. Elles retraceront le développement de cette belle théorie d'une manière plus intime qu'on ne peut le faire dans une Encyclopédie.

Dans quelques pages émouvantes Henri Poincaré a raconté la genèse de la découverte qui est son plus beau titre de gloire. Cette découverte date de l'année 1880 et comme elle fut l'origine de la Correspondance suivante nous nous permettons de reproduire ces pages[1].

Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les *fonctions fuchsiennes*; j'étais alors fort ignorant. Tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux: j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude; je ne pus m'endormir, les idées surgissaient en foule; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique. Je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries, si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées *thétafuchsiennes*.

---

[1] H. POINCARÉ, Science et Méthode, Paris 1909, p. 50—53. Voir aussi Œuvres de HENRI POINCARÉ, Paris 1916, t. 2, p. LVII—LVIII.

A ce moment, je quittai Caen, où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade. Au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification, je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.

Je me mis alors à étudier des questions d'arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne.

Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y avait des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique; je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des séries thétafuchsiennes, et que, par conséquent, il existait des fonctions fuchsiennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions; j'en fis un siège systématique et j'enlevai, l'un après l'autre, tous les ouvrages avancés; il y en avait un cependant qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.

Là-dessus, je partis pour le Mont-Valérien, où je devais faire mon service militaire; j'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon Mémoire définitif d'un trait et sans aucune peine.

D'autre part, dans un Cours professé à l'Université de Göttingen pendant l'année universitaire 1915—16, M. Klein a fait un récit de sa découverte du *Zentraltheorem* dont il sera question dans les lettres XVIII et XIX. Nous nous permettons également de reproduire ce récit[1].

Den Herbst 1881 verbrachte ich zu meiner Erholung an der Nordsee (in Borkum),

[1] F. Klein, Die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. — Dritter Teil, Funktionentheorie von 1850 bis ca. 1900.

wo ich die Schrift[1] über Riemann schrieb und das Fundamentaltheorem[2] von Bd. 19 fand (das ich dann aber erst in den Weihnachtsferien niederschrieb). Entsprechend der damaligen Anschauung der Ärzte fasste ich den Entschluss, Ostern 1882 wieder an die Nordsee zu gehen und zwar nach Norderney. Ich wollte dort in Ruhe einen 2. Teil meiner Schrift über Riemann schreiben, nämlich die Existenzbeweise für die algebraischen Funktionen auf gegebenen Riemannschen Flächen in neuer Form ausarbeiten. Ich habe es dort aber nur 8 Tage ausgehalten, denn die Existenz war zu kümmerlich, da heftige Stürme jedes Ausgehen unmöglich machten und sich bei mir starkes Asthma einstellte. Ich beschloß, schleunigst in meine Heimat Düsseldorf überzusiedeln. In der letzten Nacht vom 22. zum 23. März, die ich wegen Asthma auf dem Sofa sitzend zubrachte, stand plötzlich um $2^1/_2$ Uhr das Zentraltheorem, wie es durch die Figur des 14-Ecks in Bd. XIV der Math. Annalen ja eigentlich schon vorgebildet war, vor mir. Am folgenden Vormittag in dem Postwagen, der damals von Norden bis Emden fuhr, durchdachte ich das, was ich gefunden hatte, noch einmal bis in alle Einzelheiten. Jetzt wußte ich, daß ich ein großes Theorem hatte. In Düsseldorf angekommen, schrieb ich es gleich zusammen[3], datierte es vom 27. März, schickte es an Teubner und ließ Abzüge der Korrekturen an Poincaré und Schwarz und beispielsweise Hurwitz gehen.

Wie Poincaré am 10. April in den Comptes rendus reagierte[4], habe ich erzählt. Mir selbst aber schrieb er: „Les résultats que vous énoncez m'intéressent beaucoup, voici pourquoi; je les avais trouvés il y a déjà quelque temps ...". Wie so und wie lange er es kannte, hat er nie geäußert. Es ist begreiflich, daß die Beziehung zwischen uns eine gewisse Spannung annahm. Schwarz hinwieder war infolge mangelhafter Konstantenzählung zunächst der Meinung, das Theorem müsse falsch sein; er hat dann aber später zu neuen Beweismethoden wesentliche Grundgedanken geliefert.

Mit dem Beweise lag es in der Tat sehr schwierig. Ich benutzte die sogenannte *Kontinuitätsmethode*, welche die Mannigfaltigkeit der Riemannschen Flächen eines gegebenen p der entsprechenden Mannigfaltigkeit automorpher Gruppen mit Grenzkreis gegenüberstellt. Ich habe nie gezweifelt, daß die Beweismethode richtig sei, aber ich stieß überall auf Unfertigkeiten meiner funktionentheoretischen Kenntnisse bezw. der Funktionentheorie überhaupt, deren Erledigung ich vorläufig nur postulieren konnte, und die in der Tat erst 30 Jahre später (1912) durch Koebe voll erledigt worden sind.

Dies konnte mich nicht abhalten, im Sommer 1882 noch allgemeinere Fundamentaltheoreme aufzustellen, welche Bd. 19 und Bd. 20 gemeinsam umfassen, und die Ausarbeitung

---

[1] F. Klein, Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Leipzig 1882 = Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. XCIX, p. 499—573.

[2] Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich („Das Rückkehrschnitttheorem"), Math. Annalen, t. 19 (1882), p. 565—568 = Felix Klein, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. CI, p. 622—626.

[3] Gedruckt in Math. Annalen, t. 20 (1882), p. 49—51 = Felix Klein, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. CII, p. 627—629. („Das Grenzkreistheorem.")

[4] Sur les fonctions fuchsiennes, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris t. 94, p. 1038—1040 (10 avril 1882) = Œuvres de Henri Poincaré, Paris 1916, t. 2, p. 41—43.

der ganzen Konzeption zunächst durch Seminarvorträge vorzubereiten, die Study damals niederschrieb. Ich habe die große Mehrzahl meiner Arbeiten in der Weise fertiggestellt, daß ich zunächst bez. Vorlesungen hielt und in den Ferien dann die Redaktion folgen ließ. In den Herbstferien 1882 in Tabarz (Thüringen) ist dann die Abhandlung des Bandes 21 entstanden und am 2. Oktober 1882 abgeschlossen worden[1]. So unvollkommen und unerledigt dort auch manches ist, die Konstruktion des Gedankenganges im Großen ist geblieben und auch durch die zunächst folgenden Abhandlungen Poincarés in den Bänden 1, 3, 4, 5 der eben damals gegründeten *Acta Mathematica* nicht verschoben worden.

Nous ferons suivre maintenant la Correspondance qui commence au mois de juin 1881; elle s'est poursuivie pendant quinze mois et elle fut interrompue par une maladie de M. Klein. Nous avons ajouté quelques notes qui faciliteront aux lecteurs de trouver rapidement les ouvrages dont il sera question dans les lettres.

N. E. Nörlund.

I.

Leipzig 12. Juni 1881.

Sehr geehrter Herr!

Ihre 3 Noten in den Comptes Rendus: »Sur les fonctions fuchsiennes«[2], die ich erst gestern, und auch da nur flüchtig kennen lernte, stehen in so engem Zusammenhange mit den Überlegungen und Bestrebungen, mit denen ich mich in den letzten Jahren beschäftigte, daß ich Ihnen deshalb schreiben muß. Ich möchte mich zunächst auf die verschiedenen Arbeiten beziehen, die ich in den Bänden XIV[3], XV[4], XVII[5] der Mathematischen Annalen über elliptische Funktionen veröffentlichte. Es handelt sich bei den elliptischen Modulfunktionen natürlich nur um einen speziellen Fall der von Ihnen betrachteten Abhängig-

[1] Neue Beiträge zur Riemannschen Functionentheorie, Math. Annalen, t. 21 (1882/83), p. 141—218 = Felix Klein, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. CIII, p. 630—710. („Das allgemeine Fundamentaltheorem" steht daselbst in Abschnitt IV.)

[2] Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 92, p. 333—335 (14 février 1881); p. 395—396 (21 février 1881); p. 859—861 (4 avril 1881) = Œuvres de Henri Poincaré, Paris 1916, t. 2, p. 1—10.

[3] Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, Math. Annalen, t. 14 (1879), p. 111—172; Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen, ib. p. 417—427; Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen, ib. p. 428—471 = Felix Klein, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. LXXXII, p. 13—75, Nr. LXXXIII, p. 76—89, Nr. LXXXIV, p. 90—135.

[4] Ueber Multiplicatorgleichungen, Math. Annalen, t. 15 (1879), p. 86—88; Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen, ib. p. 533—555 = Felix Klein, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. LXXXV, p. 137—139, Nr. LXXXVI, p. 140—165.

[5] Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Math. Annalen, t. 17 (1880), p. 62—70 = Felix Klein, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t 3, Nr. LXXXVII, p. 169—178.

keitsverhältnisse; aber ein näherer Vergleich wird Ihnen zeigen, daß ich sehr wohl allgemeine Gesichtspunkte hatte. Ich möchte Sie in dieser Hinsicht auf einige besondere Punkte aufmerksam machen:

Bd. XIV p. 128 handelt von denjenigen alg. Funktionen, die sich durch Modulfunktionen darstellen lassen, ohne mit den doppeltperiodischen Funktionen zusammenzuhängen. — Dann folgt, zunächst am speziellen Falle, die wichtige Theorie der Fundamentalpolygone.

Bd. XIV p. 159—160 ist davon die Rede, daß man alle hypergeometrischen Reihen als eindeutige Funktionen geeigneter Modulfunktionen darstellen kann.

Zu Bd. XIV p. 428 ff. gehört eine Tafel, welche die Aneinanderlagerung von Kreisbogendreiecken mit den Winkeln $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ erläutert (was also ein Beispiel der von HALPHEN[1] betrachteten partikulären Funktionenklasse ist), wobei ich inzwischen bemerken muß, daß schon in Crelle's Journal Bd. LXXV Hr. SCHWARZ[2] den Fall $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ erläuterte.

Bd. XVII p. 62 ff. bringe ich sodann in knapper Übersicht die gereifteren Anschauungen, mit denen ich mir in der Zwischenzeit die Theorie der elliptischen Modulfunktionen zurecht gelegt hatte.

Diese Anschauungen selbst habe ich nicht publiziert, ich habe sie aber im Sommer 1879 am Münchener Polytechnikum vorgetragen. Mein Gedankengang, der mit dem jetzt von Ihnen eingeschlagenen nun vielfach zusammentrifft, war damals dieser:

1. Periodische und doppeltperiodische Funktionen sind nur Beispiele für eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich. Es ist Aufgabe der modernen Analysis, alle diesen Funktionen zu bestimmen.

2. Die Anzahl dieser Transformationen kann eine endliche sein; dies gibt die Gleichungen des Ikosaeder's, Oktaeder's . . . . die ich früher betrachtete (Math. Annalen IX[3], XII[4]) und von denen ich bei Bildung dieses ganzen Ideenkreises ausging.

[1] Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de GAUSS, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 92, p. 856—858 (4 avril 1881) = Œuvres de G. H. HALPHEN, Paris 1918, t. 2, p. 471—474.

[2] Über diejenigen Fälle, in welchen die GAUSSische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt, J. f. d. reine u. angewandte Math., t. 75 (1873), p. 292—335 = H. A. SCHWARZ, Ges. math. Abh., Berlin 1890, t. 2, p. 211—259.

[3] Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst, Math. Annalen, t. 9 (1876), p. 183—208 = FELIX KLEIN, Ges. math. Abh., Berlin 1922, t. 2, Nr. LI, p. 275—301.

[4] Ueber lineare Differentialgleichungen, Math. Annalen, t. 12 (1877), p. 167—179; Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder, ib. p. 503—560 = FELIX KLEIN, Ges. math. Abh., Berlin 1922, t 2, Nr. LII, p. 307—320; ib. p. 321—384.

3. Gruppen von unendlich vielen linearen Transformationen, die zu brauchbaren Funktionen Anlaß geben (groupe discontinu nach Ihrer Bezeichnung) erhält man *zum Beispiel*, wenn man von einem Kreisbogenpolygon ausgeht, dessen Kreise einen festen Kreis rechtwinkelig schneiden und dessen Winkel genaue Theile von π sind.

4. Man sollte sich mit allen solchen Funktionen beschäftigen (wie Sie das in der That jetzt beginnen), um aber konkrete Ziele zu erreichen, beschränken wir uns auf Kreisbogendreiecke und insbesondere auf elliptische Modulfunktionen. —

Ich habe mich seitdem vielfach, auch in Gesprächen mit anderen Mathematikern, mit diesen Fragen beschäftigt, aber abgesehen davon, daß ich noch zu keinem definitiven Resultate gekommen bin, gehört das am Ende nicht hierher. Ich will mich auf das beschränken, was ich publizirt oder vorgetragen habe. Vielleicht hätte ich mich schon früher mit Ihnen oder einem Ihrer Freunde, wie z. B. Herrn Picard [1], in Verbindung setzen sollen. Denn der Ideenkreis, in welchem sich Ihre Arbeiten seit 2—3 Jahren bewegen, ist mit dem meinigen in der That äußerst enge verwandt. So wird mich freuen, wenn dieser mein erster Brief Anlaß zu einer fortgesetzten Korrespondenz geben sollte. Ich bin freilich im Augenblicke durch andere Verpflichtungen von diesen Arbeiten abgedrängt, aber habe um so mehr Anlaß, in einigen Monaten zu denselben zurückzukehren, als ich für nächsten Winter eine Vorlesung über Differentialgleichungen angezeigt habe.

Herrn Hermite wollen Sie mich bestens empfehlen. Ich dachte lange daran, mit ihm briefliche Verbindung zu suchen, und würde das, wie ich nicht zweifele zu meinem größten Vortheile, schon längst ausgeführt haben, wenn ich nicht in der Sprache ein gewisses Hemmniß gefunden hätte. Ich bin, wie Sie vielleicht wissen, lange genug in Paris gewesen, um französisch sprechen und schreiben zu sollen; in der Zwischenzeit aber ist letztere Fähigkeit durch Nichtgebrauch nur zu sehr verkümmert.

Hochachtungsvoll

Prof. Dr. F. Klein.

Adresse: Leipzig, Sophienstraße 10/II.

---

[1] Würden Sie Herrn Picard, obgleich es ein untergeordneter Punkt ist, vielleicht gelegentlich auf Annalen XIV, p. 122, § 8 aufmerksam machen!

II.

15 Juin.

Monsieur,

Votre lettre me prouve que vous aviez aperçu avant moi quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans la théorie des fonctions fuchsiennes. Je n'en suis nullement étonné; car je sais combien vous êtes versé dans la connaissance de la géométrie non-euclidienne qui est la clef véritable du problème qui nous occupe.

Je vous rendrai justice à cet égard quand je publierai mes résultats; j'espère pouvoir me procurer d'ici là les tomes 14, 15 et 17 des Mathematische Annalen qui n'existent pas à la bibliothèque universitaire de Caen. Quant à la communication que vous avez faite au Polytechnicum de Munich, je vous demanderai de vouloir bien me donner quelques détails à ce sujet, afin que je puisse ajouter à mon mémoire une note vous rendant pleine justice; car sans doute, je ne pourrai me procurer directement votre travail.

Comme je ne pourrai sans doute me procurer *immédiatement* les Mathematische Annalen, je vous prierais aussi de vouloir bien me donner quelques explications sur quelques points de votre lettre. Vous parlez de „die elliptischen Modulfunktionen“.

Pourquoi ce pluriel? Si la fonction modulaire est le carré du module exprimé en fonction du rapport des périodes; il n'y en a qu'une; il faut donc entendre autrement l'expression Modulfunktionen.

Que voulez-vous dire par ces fonctions algébriques qui sont susceptibles d'être représentées par des fonctions modulaires? Qu'est-ce aussi que la „Theorie der Fundamentalpolygone“?

Je vous demanderai aussi de m'éclairer sur les points suivants: Avez-vous trouvé tous les Kreisbogenpolygone qui donnent naissance à un groupe discontinu?

Avez-vous démontré l'existence des fonctions qui correspondent à chaque groupe discontinu?

J'ai écrit à M. Picard pour lui communiquer votre remarque.

Je me félicite, Monsieur, de l'occasion qui me met en rapport avec vous, j'ai pris la liberté de vous écrire en français; car vous me dites que vous connaissez cette langue.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération,

Poincaré.

III.

Leipzig 19. Juni 1881.

Geehrter Herr!

Als ich gestern Ihren willkommenen Brief erhielt, sandte ich Ihnen umgehend Separatabzüge von denjenigen auf unser Thema bezüglichen Arbeiten zu, von denen ich solche überhaupt noch besitze. Lassen Sie mich heute diese Sendung durch einige Zeilen erläutern. Mit dem einen Briefe wird es freilich nicht abgethan sein, sondern wir werden viel korrespondieren müssen, bis wir wechselseitig volle Fühlung gewonnen haben. Ich möchte heute folgende Punkte hervorheben:

1. Unter den übersandten Arbeiten fehlen die 3 wichtigsten aus dem 14. Bande der Annalen, desgleichen meine Untersuchungen über das Ikosaeder in Bd. 9 und 12, sowie meine zweite Arbeit über lineare Differentialgleichungen (die auch Hrn. Picard unbekannt scheint) ebenfalls in Bd. 12. Ich bitte Sie, sich dieselben irdendwo zu verschaffen. Separatabzüge sandte ich verschiedene nach Paris, z. B. an Hermite.

2. An meine eigenen Arbeiten schließen sich die meiner Schüler Dyck und Gierster. Ich benachrichtige beide, Ihnen Separatabzüge zuzustellen. Eine auf dieselben Theorien bezügliche Doktordissertation von Hrn. Hurwitz [1] wird eben gedruckt und Ihnen in einigen Wochen zukommen.

3. Seit vorigem Herbst ist einer Ihrer Landsleute hier, dessen Namen Sie vermuthlich kennen, da er zusammen mit Picard und Appell studirte: Mr. Brunel (Adr. Liebigstraße 38/2). Vielleicht interessirt es Sie, auch mit ihm in Korrespondenz zu treten; er wird Ihnen von den hiesigen Seminareinrichtungen und von der Rolle, welche eben dort die eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich gespielt haben, besser erzählen können, als ich selbst.

4. Ich habe Sommersemester 1879 von Hrn. Gierster ein Heft meiner Vorlesung ausarbeiten lassen. Im Augenblicke ist dasselbe verliehen, doch werde ich dasselbe nächster Tage zurückbekommen und mit Hrn. Brunel zusammen durchgehen, worauf wir Ihnen Bericht erstatten.

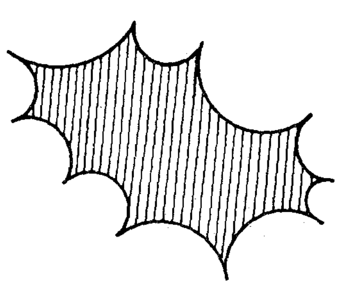
5. Die Benennung »fonctions fuchsiennes« weise ich zurück, so gut ich verstehe, dass Sie durch Fuchs'sche Arbeiten zu diesen Ideen mit veranlaßt wurden. Im Grunde basiren alle solche Untersuchungen auf Riemann. Für meine eigene Entwickelung war die eng verwandte Betrachtung von Schwarz in Bd. 75 des Borchardt'schen Journals (die ich Ihnen dringend empfehle, wenn Sie dieselbe noch nicht kennen sollten) von massgebender Bedeutung. Die Arbeit von

[1] Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichungen 1. Stufe, Leipzig 1881; Math. Annalen, t. 18 (1881), p. 528—592.

Hrn. Dedekind[1] über elliptische Modulfunktionen in Borchardt's Journal Bd. 83 erschien erst, als ich mir über die geometrische Repräsentation der Modulfunktionen bereits klar war (Herbst 1877). Zu diesen Arbeiten stehen die von Fuchs vermöge ihrer ungeometrischen Form in bewußtem Gegensatze. Ich bestreite nicht die grossen Verdienste, welche Hr. Fuchs um andere Theile der Lehre von den Differentialgleichungen hat, aber gerade hier lassen seine Arbeiten um so mehr im Stich, als ihm das einzige Mal, wo er in einem Briefe an Hermite die elliptischen Modulfunktionen erläuterte[2], ein fundamentaler Fehler unterlief, den dann Dedekind l. c. nur zu sanft monirte.

6. Man kann eine Funktion mit linearen Transformationen in sich insbesondere so definiren, daß man die *Halbebene* auf ein Kreisbogenpolygon, welches beliebig vorgegeben ist, abbildet. Dies ist dann freilich ein nur spezieller Fall der allgemeinen (ich weiss im Augenblicke nicht, ob Sie sich nicht nur auf diesen speziellen Fall beschränken). Die Gruppe der linearen Transformationen ist dann dadurch partikularisirt, dass sie in einer doppelt so grossen Gruppe von Operationen enthalten ist, welche neben linearen Transformationen auch Spiegelungen (Transformationen durch reziproke Radien) umfasst. In diesem Falle ist die Existenz der Funktion durch ältere Arbeiten von Schwarz, resp. Weierstrass, sicher gestellt, sofern man nicht auf die allgemeinen Riemann'schen Prinzipien rekurriren will. Siehe Schwarz[3] in Borchardt Bd. 70, Abbildung der Halbebene auf Kreisbogenpolygone.

7. Auch in diesem speziellen Falle habe ich bislang durchaus nicht alle »groupes discontinus« aufgestellt; ich habe nur gesehen, dass es sehr viele gibt, bei denen kein fester Grundkreis existirt, bei denen also die Analogie mit der nicht-euklidischen Geometrie (die mir übrigens in der That sehr geläufig ist) nicht zutrifft. Nehmen Sie z. B. ein beliebiges Polygon, begränzt von *irgend* welchen sich berührenden Kreisen, so wird die Vervielfältigung durch Symmetrie ebenfalls zu einer *groupe discontinu* führen.



Figur 1.

[1] Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen, J. f. d. reine u. angewandte Math., t. 83 (1877), p. 265—292.

[2] Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces, J. f. d. reine u. angewandte Math., t. 83 (1877), p. 13—37 = L. Fuchs, Ges. math. Werke, Berlin 1906, t. 2, p. 85—111. Voir aussi la note de M. Schlesinger l. c. p. 112—114.

[3] Ueber einige Abbildungsaufgaben, J. f. d. reine u. angewandte Math., t. 70 (1869), p. 105—120 = H. A. Schwarz, Ges. math. Abh., Berlin 1890, t. 2, p. 65—83.

8. Die übrigen Fragen Ihres Briefes finden wohl schon durch die übersandten Arbeiten ihre Beantwortung, insbesondere die nach dem Pluralis der „Modulfunktionen“ und in der Hauptsache auch die nach den „Fundamentalpolygonen“.

In der Hoffnung recht bald wieder von Ihnen zu hören

Ihr ganz ergebener

F. Klein.

IV.

Caen, le 22 Juin 1881.

Monsieur,

Je n'ai pas encore reçu les envois que vous m'annoncez et que je ne tarderai sans doute pas à voir arriver à leur adresse. Mais je ne veux pas attendre ce moment pour vous remercier de vos promesses, ainsi que de votre lettre que j'ai lue avec le plus grand intérêt. Aussitôt après l'avoir reçue, j' ai couru à la bibliothèque pour y demander le 70e volume de Borchardt; malheureusement ce volume était prêté et je n'ai pu y lire le mémoire de M. Schwarz. Mais je crois pouvoir le reconstituer d'après ce que vous m'en dites et y reconnaître certains résultats que j'avais trouvés sans me douter qu'ils avaient fait l'objet de recherches antérieures. Je crois donc comprendre que les fonctions fuchsiennes que les recherches de M. Schwarz et les vôtres permettent de définir sont celles dont je me suis occupé plus particulièrement dans ma note du 23 Mai [1]. Le groupe particulier dont vous me parlez dans votre dernière lettre me semble fort intéressant et je vous demanderai la permission de citer ce passage de votre lettre dans une communication [2] que je ferai prochainement à l'Académie et où je chercherai à généraliser votre résultat.

Quant à la dénomination de fonctions fuchsiennes, je ne la changerai pas. Les égards que je dois à M. Fuchs ne me le permettent pas. D'ailleurs, s'il est vrai que le point de vue du savant géomètre d'Heidelberg est complètement différent du vôtre et du mien, il est certain aussi que ses travaux ont servi de point de départ et de fondement à tout ce qui s'est fait depuis dans cette théorie. Il n'est donc que juste que son nom reste attaché à ces fonctions qui y jouent un rôle si important.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération,

Poincaré.

---

[1] Sur les fonctions fuchsiennes, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 92, p. 1198—1200 (23 mai 1881) = Œuvres de Henri Poincaré, Paris 1916, t. 2, p. 12—15.

[2] ib. p. 1484—1487 (27 juin 1881) = Œuvres p. 19—22.

V.

Leipzig 25. Juni 1881.

Geehrter Herr! Schreiben Sie mir doch bitte umgehend eine Karte, ob meine Sendung von Separatabzügen auch jetzt noch nicht eingetroffen ist; ich brachte sie selbst heute vor 8 Tagen auf die Post. Ueber F. würden Sie sich anders ausdrücken, wenn Sie die Literatur völlig kennten. Die Lehre von der Abbildung der Kreisbogenpolygone steht völlig unabhängig von der F. Arbeit[1] in t. 66, das Gemeinsame ist nur, daß beide Betrachtungsweisen durch RIEMANN angeregt sind.

Hochachtungsvoll

Prof. Dr. F. KLEIN.

VI.

Caen, le 27 Juin 1881.

Monsieur,

Au moment où j'ai reçu votre carte, j'allais précisément vous écrire pour vous remercier de votre envoi et vous en annoncer l'arrivée. S'il a été retardé c'est par suite d'une erreur de la poste qui l'a envoyé d'abord à la Sorbonne, puis au Collège de France, bien que l'adresse eût été parfaitement bien mise.

En ce qui concerne M. FUCHS et la dénomination de fonctions fuchsiennes, il est clair que j'aurais pris une autre dénomination si j'avais connu le travail de M. SCHWARZ; mais je ne l'ai connu que par votre lettre, après la publication de mes résultats de sorte que je ne peux plus changer maintenant le nom que j'ai donné à ces fonctions sans manquer d'égards à M. FUCHS. J'ai commencé la lecture de vos brochures qui m'ont vivement intéressé, principalement celle qui a pour titre „Ueber elliptische Modulfunktionen". C'est au sujet de cette dernière que je vous demanderai la permission de vous adresser quelques questions.

1° Avez-vous déterminé les *Fundamentalpolygone* de tous les *Untergruppen* que vous appelez *Kongruenzgruppen* et en particulier de ceux-ci:

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \qquad \bmod n.$$

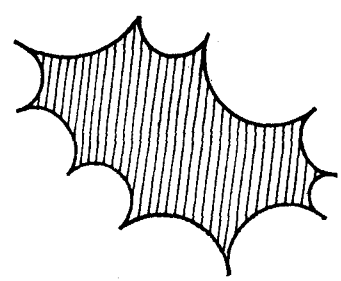
2° Dans mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes, j'ai partagé les groupes fuchsiens d'après divers principes de classification et entre autres d'après un nombre que j'appelle leur genre. De même vous partagez les *Untergruppen* d'apres

[1] Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, J. f. d. reine u. angewandte Math., t. 66 (1866), p. 121—160 = L. FUCHS, Ges. math. Werke, Berlin 1904, t. 1, p. 159—204.

un nombre que vous appellez leur *Geschlecht.* Le *genre* (tel que je l'entends) et le *Geschlecht* sont-ils un seul et même nombre? Je n'ai pu le savoir, par ce que je ne sais pas ce que c'est que le *Geschlecht im Sinne der Analysis situs.* Je vois seulement que ces nombres s'annulent à la fois. Auriez-vous donc l'obligeance de me dire ce que c'est que ce *Geschlecht im Sinne der Analysis situs* ou, si cette définition est trop longue pour être donnée dans une lettre, dans quel ouvrage je pourrais la trouver? Dans votre dernière lettre, vous me demandiez si je ne suis renfermé dans le cas particulier où „Die Gruppe der linearen Transformationen ist dadurch partikularisirt, dass sie in einer doppelt so grossen Gruppe von Operationen enthalten ist, welche neben linearen Transformationen auch Spiegelungen umfasst". Je ne me suis pas renfermé dans ce cas, mais j'ai supposé que toutes les transformations linéaires conservaient un certain cercle fondamental. Je pense d'ailleurs pouvoir aborder par une méthode analogue le cas le plus général.

A ce propos, il me semble que tous les *Untergruppen* relatifs aux fonctions modulaires ne rentrent pas dans ce cas spécial.

Au sujet de ce groupe discontinu dont vous me parlez et que l'on obtient par des *Spiegelungen* et par *la Vervielfältigung* d'un polygone limité par des arcs de cercle se touchant deux à deux il me semble qu'il y a une condition supplémentaire dont vous n'avez pas parlé bien qu'elle ne vous ait sans doute pas échappé; deux arcs de cercle quelconques prolongés, ne doivent pas se couper. Serait-ce abuser de votre complaisance que de vous poser encore une question.



Figur 1.

Vous dites: „in diesem Falle ist die Existenz der Funktion durch Arbeiten von SCHWARZ sichergestellt", et vous ajoutez: „*sofern man nicht auf die allgemeinen Riemann'schen Principien rekurriren will*". Qu'entendez-vous par là?

J'ai écrit dernièrement à M. HERMITE; je lui ai fait part succinctement du contenu de vos lettres, et je lui ai envoyé les compliments dont vous m'aviez chargé pour lui.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma reconnaissance et de mon respect.

POINCARÉ.

VII.

Leipzig den 2. Juli 1881.

Geehrter Herr!

Lassen Sie mich die verschiedenen Fragen, die Sie in Ihrem willkommenen Briefe vom 27. Juni stellen, so gut es gehen will, umgehend beantworten.

1. Die Fundamentalpolygone der Kongruenzgruppen $\alpha \equiv \delta \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0$ (mod n) habe ich bei $n = 5$ (wo durch Zusammenbiegen der Kanten das Ikosaeder entsteht) und bei $n = 7$ im 14. Bande [1] ausführlich beschrieben. Der allgemeine Fall $n =$ Primzahl bildet den Gegenstand einer Arbeit von DYCK [2], die eben im Druck ist. Wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, habe ich die Sache nicht erledigt.

2. „Geschlecht im Sinne der Analysis situs" wird jeder geschlossenen Fläche beigelegt. Dasselbe ist gleich der Maximalzahl solcher in sich zurückkehrender Schnitte der Fläche, die man ausführen kann, ohne die Fläche zu zerstücken. Wenn jetzt die betreffende Fläche als Bild der Werthsysteme w, z einer algebraischen Gleichung $f(w, z) = 0$ betrachtet werden kann, so ist ihr Geschlecht eben auch das Geschlecht der Gleichung. Ihr „genre" und mein „Geschlecht" sind also *materiell dieselben Zahlen*, es liegt bei mir nur vermuthlich eine freiere Auffassung der RIEMANN'schen Fläche und der auf sie gegründeten Definition von p zu Grunde.

3. Es gibt innerhalb der Gruppe der Modulfunktionen allerdings Untergruppen, welche ein unsymmetrisches Fundamentalpolygon besitzen, dahin gehören, wie ich in Bd. 14 nachwies [3], insbesondere diejenigen Untergruppen, welche den singulären Resolventen der Modulargleichung für $n = 7$ und $n = 11$ entsprechen.

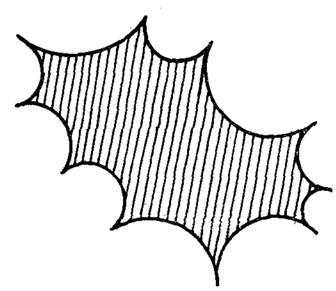
4. Dass sich bei dem Polygon die Kreise rückwärts verlängert nicht schneiden dürfen, wenn eine eindeutige Funktion entstehen soll, ist mir in der That wohl bekannt. Gerade auf diesen Punkt muss man meines Erachtens die Aufmerksamkeit richten, wenn man beweisen will, dass sich die Koordinaten w, z

[1] Über die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, Math. Annalen, t. 14 (1878/79), p. 111—170, Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen, Math. Annalen, t. 14 (1878/79), p. 428—471 = FELIX KLEIN, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. LXXXII et Nr. LXXXIV, p. 13—75 et p. 90—135.

[2] Versuch einer übersichtlichen Darstellung der RIEMANN'schen Fläche, welche der GALOIS'schen Resolvente der Modulargleichung für Primzahltransformationen der elliptischen Functionen entspricht, Math. Annalen, t. 18 (1881), p. 507—527.

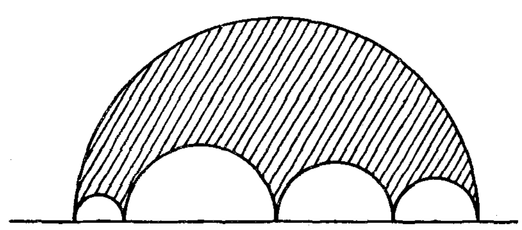
[3] Über die Erniedrigung der Modulargleichungen, Math. Annalen, t. 14 (1879), p. 417—427 = FELIX KLEIN, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. LXXXIII, p. 76—89.

des Punktes einer beliebigen algebraischen Kurve als eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich angeben lassen. Ich werde Ihnen angeben, wie weit ich in dieser Frage gekommen bin. Nach den Arbeiten von SCHWARZ, resp. WEIERSTRASS, kann man die Halbebene immer so auf ein Kreisbogenpolygon abbilden, dass die Punkte I, II, III, IV, V, welche den 1, 2, 3, 4, 5, auf der Begränzung der Halbebene entsprechen, beliebige Lage haben. Nun seien I, II, III, IV, V ... die Verzweigungspunkte einer algebraischen Funktion $w(z)$; und diese algebraische Funktion möge *keine anderen* Verzweigungspunkte besitzen. Dann sind offenbar w und z eindeutige Funktionen der gewollten Art von denjenigen Hülfsvariabeln, in deren Ebene das gezeichnete Polygon liegt.



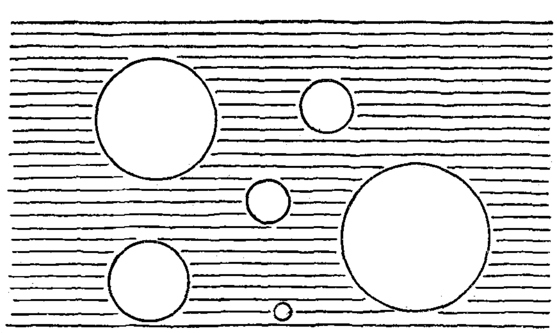
Figur 1.

Wenn also alle Verzweigungspunkte einer algebraischen Funktion $w(z)$ auf einem Kreise der z-Ebene liegen, so ist die Frage ohne weiteres zu bejahen. Wie aber, wenn das nicht der Fall ist? Da komme ich unter Umständen auf solche Polygone, wie ich sie das vorige Mal nannte. Findet keinerlei Symmetrie statt, so komme ich wenigstens (durch Aufstellung zugehöriger Differentialgleichungen des von mir behandelten Typus $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = R(z)$) auf einen analog gestalteten Fundamentalraum, dessen Kanten unter Winkeln = Null zusammenstossen und übrigens paarweise durch gewisse lineare Substitutionen zusammengehören. *Aber ich kann nicht beweisen, dass dieser Fundamentalraum mit seinen Wiederholungen zusammen nur einen Theil der komplexen Ebene überdeckt.* Und an dieser Schwierigkeit finde ich mich nun schon lange aufgehalten.



Figur 2.

5. Uebrigens bekommt man merkwürdige andere Beispiele von diskontinuirlichen Gruppen, wenn man beliebig viele einander nicht schneidende Kreise annimmt und nun an ihnen durch reziproke Radien spiegelt. Ich habe dabei den



Figur 3.

Theil der Ebene, der gleichzeitig ausserhalb aller Kreise liegt, und der also das halbe Fundamentalpolygon vorstellt, der Deutlichkeit halber schraffirt. Diese Gruppen werden gelegentlich von SCHOTTKY betrachtet (BORCHARDTS Journal t. 83, pag. 300—351), ohne dass dort ihre prinzipielle Bedeutung hervorgehoben würde[1].

6. RIEMANN's Prinzipien geben zunächst keinen Weg, um eine Funktion, deren Existenz man erschliesst, wirklich zu bilden. Man ist daher geneigt, sie als unsicher zu betrachten, so gewiss es auch sein mag, dass die Resultate, welche aus ihnen folgen, richtig sind. Demgegenüber haben WEIERSTRASS und SCHWARZ bei der von mir berührten Frage der Abbildung von Kreisbogenpolygonen wirkliche Bestimmungen der in Betracht kommenden Konstanten durch konvergente Prozesse gegeben. Will man RIEMANN'sche Prinzipien gebrauchen, so kann man folgenden sehr allgemeinen Satz aufstellen. Es sei ein Polygon gegeben, mit einer oder auch mehreren getrennten Peripherien. Das Polygon kann ein mehrblättriges sein, dessen Blätter durch Verzweigungspunkte verbunden sind. Jede Peripherie besteht aus einer Anzahl von Stücken; jedes Stück gehe durch eine bestimmte lineare Substitution in eins der übrigen über. Dann kann man immer eine Funktion konstruiren, welche im Inneren des Polygons beliebige vorgeschriebene Unstetigkeiten hat, und deren reeller Theil gewisse vorgegebene Periodizitätsmoduln erhält, wenn man von einem Stücke der Begränzung durch das Innere des Polygons zum zugehörigen Stücke übergeht. Unter diesen Funktionen sind insbesondere solche, welche im Inneren des Polygons durchweg eindeutig sind und auf je zwei entsprechenden Punkten des Randes denselben Werth aufweisen[2]. Der Beweis lässt sich genau demjenigen nachbilden, den RIEMANN[3] in § 12 des ersten Theils seiner ABELschen Funktionen für das besondere Polygon gegeben hat, das aus p übereinander geschichteten Parallelogrammen besteht, die durch $2p—2$ Verzweigungspunkte verbunden sind. Dieser Satz, den ich mir übrigens erst in den letzten Tagen völlig zurechtlegte, schliesst, so viel ich sehe, alle die Existenzbeweise, von denen Sie in Ihren Noten sprechen, als spe-

[1] Vgl. hierzu die Note von SCHOTTKY, Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich, Math. Annalen, t. 20 (1882), p. 299—300.

[2] Pour que ce théorème soit vrai il faut encore ajouter une condition; *cf.* Über den Begriff des funktionentheoretischen Fundamentalbereichs, Math. Annalen, t. 40 (1892), p. 131 = FELIX KLEIN, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. CIV, p. 711—720. POINCARÉ fait allusion à cette lettre dans son Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes (Acta math., t. 5 (1884), p. 211 = Œuvres, Paris 1916, t. 2, p. 404), où il s'exprime comme il suit: »J'avais, il est vrai, dans les *Mathematische Annalen,* énoncé un résultat particulier sur ces équations irrégulières, mais ce résultat est inexact; j'amais été trompé par une fausse interprétation d'un théorème de M. KLEIN dont je ne connais — sais pas la démonstration«.

[3] Theorie der ABEL'schen Functionen, J. f. d. reine u. angewandte Math., t. 54 (1857), p. 133—136 = BERNHARD RIEMANN, Ges. math. Werke, Leipzig 1892, p. 119—122.

zielle Fälle oder leichte Folgerungen ein. Übrigens ist mein Satz, wie manches, was ich heute schreibe, noch ungenau formuliert; ich müsste zu ausführlich sein, wenn ich das vermeiden wollte; Sie werden leicht meine Meinung erkennen.

7. Lassen Sie mich noch eine Bemerkung über eine andere Ihrer Veröffentlichungen hinzufügen. Sie sprechen davon, dass die θ-Funktionen, die aus der Umkehr der algebraischen Integrale an Kurven vom Geschlechte p entstehen, nicht die allgemeinen ihrer Art sind. Dass eben diese Überlegungen in Deutschland allgemein gekannt sind, können Sie nicht wissen: eine ganze Anzahl jüngerer Mathematiker arbeitet daran, die Bedingungen zu finden, durch welche sich die sogenannten Riemann'schen θ-s von den allgemeinen unterscheiden. Dagegen wunderte mich, dass Sie die Konstantenzahl der Riemannschen θ gleich $4p+2$ angeben, während es doch $3p-3$ sein muss. Haben Sie Riemann, die betr. Entwickelungen, nicht gelesen? Und ist Ihnen die ganze Diskussion, welche Brill und Nöther im 7. Bande der Math. Annalen pap. 300—307 zum Abschluss bringen, unbekannt?

In der Hoffnung, bald wieder von Ihnen zu hören, bin ich Ihr hochachtungsvoll ergebener F. Klein.

VIII.

Caen, 5 Juillet 1881.

Monsieur,

J'ai reçu votre lettre que j'ai lue avec le plus vif intérêt. Je vous demande mille pardons de la question que je vous ai posée au sujet du „Geschlecht im Sinne der Analysis Situs". J'aurais pu vous éviter la peine de m'y répondre, puisque je trouvais l'explication à la page suivante de votre mémoire. Vous vous rappelez sans doute que dans une de mes dernières lettres, je vous demandais l'autorisation d'en citer une phrase dans une communication où je me proposais de généraliser vos résultats. Vous ne m'avez pas répondu à ce sujet et j'ai pris votre silence pour un acquiescement. J'ai fait cette communication [1] en deux fois, dans les séances du 27 Juin et du 4 Juillet.

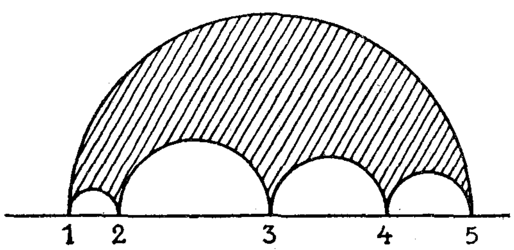
Vous trouverez que nous nous sommes rencontrés sur quelques points. Mais la citation que j'ai faite de votre phrase vous sera, je pense, une garantie suffisante.

Permettez-moi, Monsieur, encore une question; où trouverai-je les travaux

[1] Sur les fonctions fuchsiennes, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 92, p. 1484—1487 (27 juin 1881); Sur les groupes kleinéens, ib. t. 93, p. 44—46 (11 juillet 1881) = Œuvres de Henri Poincaré, Paris 1916, t. 2, p. 19—25.

de MM. Schwarz et Weierstrass dont vous me parlez; d'abord au sujet de ce théorème que:

„Man kann immer die Halbebene so auf ein Kreisbogenpolygon abbilden, dass die Punkte I, II, III, IV, V, welche den 1, 2, 3, 4, 5 auf der Begränzung der Halbebene entsprechen, beliebige Lage haben". Ce théorème ne m'était pas inconnu, car je l'ai démontré dans ma communication[1] du 23 Mai. Mais où le trouverai-je dans les travaux de mes devanciers? Est-ce au Tome 70 de Crelle? Où trouverai-je aussi les développements dont vous me parlez dans la phrase suivante: „Demgegenüber haben Weierstrass und Schwarz bei der von mir berührten Frage der Abbildung von Kreisbogenpolygonen wirkliche Bestimmungen der in Betracht kommenden Konstanten durch konvergente Prozesse gegeben"?



Figur 2.

Le théorème que vous me dites avoir découvert m'a beaucoup intéressé. Il est clair que, comme vous me le dites, votre résultat contient comme cas particulier, „alle meine Existenzbeweise". Mais il arrive après.

J'arrive à votre remarque relative aux fonctions abéliennes. Quand j'ai parlé de $4p+2$ constantes, il ne s'agissait pas du nombre des modules. J'ai dit ceci: »Une relation algébrique de genre p peut toujours être ramenée au degré $p+1$. Une relation de degré $p+1$ et de genre p dépend de $4p+2$ paramètres; car une relation *générale* de degré $p+1$ dépend de

$$\frac{(p+1)\,(p+4)}{2} \qquad \text{paramètres}$$

Mais il y a:

$$\frac{p(p-1)}{2} - p \qquad \text{points doubles.}$$

Il reste donc $4p+2$ paramètres indépendants. J'ai ainsi, non le nombre des modules, mais une limite supérieure de ce nombre, ce qui me suffisait pour mon objet.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération,

Poincaré.

[1] Sur les fonctions fuchsiennes, ib. t. 92, p. 1198—1200 (23 mai 1881). = Œuvres, t. 2, p. 12—15.

IX.

Leipzig 9. Juli 1881.

Geehrter Herr!

In vorläufiger Beantwortung Ihres Briefes habe ich etwa folgendes zu sagen:

1. Es ist mir ganz recht, dass Sie jene Stelle aus meinem Briefe zitirt haben. Bislang besitze ich nur erst Ihre Note vom 27. Juni. Ueber die Benennung, die Sie dieser Funktionenklasse ertheilt haben, war ich einigermassen erstaunt; denn ich habe ja nichts weiter gethan als die Existenz dieser Gruppen bemerkt. Was mich angeht, so werde ich weder von „fuchsiennes" noch von „kleinéennes" Gebrauch machen, sondern bei meinen „Funktionen mit linearen Transformationen in sich" bleiben.

2. Was ich über den Werth der RIEMANN'schen Prinzipien sagte, war nicht scharf genug. Es ist kein Zweifel, dass das „DIRICHLET'sche Prinzip", als überhaupt nicht konklusiv, verlassen werden muss. Man kann es aber vollständig durch strengere Beweisführung ersetzen. Sie finden das näher ausgeführt in einer Arbeit von SCHWARZ, die ich eben erst in diesen Tagen (zwecks meiner Vorlesung) genauer ansah und in der Sie auch die Angaben über Konstantenbestimmungen finden, die in BORCHARDTS Journal (an Arbeiten in BORCHARDTS Journal müssen Sie jedenfalls Bd. 70, 74, 75 ansehen) nur angedeutet sind; dieselbe steht in den Berliner Monatsberichten 1870, pag. 767—795[1].

3. Der allgemeine Existenzbeweis, von dem ich das vorige Mal sprach, gilt natürlich auch für Gruppen, die aus irgendwelchen analytischen (nicht nothwendig linearen) Substitutionen zusammengesetzt sind. Es ist merkwürdig, dass in diesem Sinne jede Operationsgruppe Funktionen definirt, die bei ihr ungeändert bleiben. Die „groupes discontinus" haben nur das voraus, dass bei ihnen zugehörige *eindeutige* Funktionen existiren, was allerdings sehr wesentlich ist. Würde man die höheren Fälle durch *eindeutige* Funktionen von *mehreren* Veränderlichen beherrschen können, wie man es in dem besonderen bei RIEMANN in § 12 behandelten Falle vermöge des JACOBIschen Umkehrproblems zu thun pflegt?

So viel für heute. Ich habe mittlererweile mit Herrn BRUNEL meine älteren Sachen, namentlich auch die Vorlesungshefte von 1877—78 und 78—79 (die ich damals habe umarbeiten lassen) durchgegangen und wird Hr. BRUNEL Ihnen demnächst darüber schreiben.

Hochachtungsvoll

Ihr ergebener

Prof. Dr. F. KLEIN.

---

[1] H. A. SCHWARZ, Ges. math. Abh., Berlin 1890, t. 2, p. 144—171.

X.

Leipzig 4. Dez. 1881.
Sophienstrasse 10/II.

Sehr geehrter Herr!

Nachdem ich lange über die uns gemeinsam interessirenden Fragen nur beiläufig nachgedacht habe, habe ich heute früh Gelegenheit genommen, die verschiedenen Mittheilungen, wie Sie sie der Reihe nach in den Comptes Rendus veröffentlicht haben, im Zusammenhange zu lesen. Ich sehe, dass Sie nun wirklich zu einem Beweise gekommen sind (8. August): que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes" und „que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire"[1]. Indem ich Ihnen dazu gratuliere, dass Sie soweit gekommen sind, möchte ich Ihnen einen Vorschlag machen, der Ihren und meinen Interessen auf gleiche Weise gerecht wird. Ich möchte Sie bitten, mir für die Mathematischen Annalen einen kurzen oder einen längeren Aufsatz zu schicken, oder, wenn Sie keine Zeit zur Ausarbeitung eines solchen finden, mir einen *Brief* zu schicken, in welchem Sie in grossen Zügen Ihre Gesichtspunkte und Resultate angeben. Ich selbst würde dann diesen Brief mit einer Anmerkung begleiten, in welcher ich darlegte, wie sich von mir aus die ganze Sache stellt, und wie gerade das Programm, welches Sie jetzt ausführen, als hodegetisches Prinzip meinen Arbeiten über Modulfunktionen zu Grunde lag. Natürlich würde ich diese Anmerkung Ihnen vor dem Druck zur Begutachtung zustellen. — Eine solche Publikation würde Zweierlei erreichen: einmal würde, was Ihnen vermuthlich erwünscht ist, das Leserpublikum der Math. Annalen auf Ihre Arbeiten mit Entschiedenheit aufmerksam gemacht werden; andererseits würden, auch dem allgemeineren Publikum gegenüber, Ihre Arbeiten in derjenigen Verbindung mit den meinigen stehen, die nun einmal thatsächlich vorhanden ist. Sie werden zwar, wie Sie mir schreiben, diese Beziehungen in Ihrem ausführlichen Mémoire auseinandersetzen; aber bis dahin vergeht viele Zeit, und es liegt mir daran, dass es auch in den Annalen gesagt wird.

Ich selbst habe mittlerweile eine kleine Schrift[2] über „Riemanns Theorie" fertig gestellt, die Ihnen vielleicht interessant ist, weil sie diejenige Konzeption der Riemannschen Fläche gibt, mit der R. selbst meines Erachtens eigentlich

[1] Sur les fonctions fuchsiennes, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 93, p. 301—303 (8 août 1881). = Œuvres de Henri Poincaré, Paris 1916, t. 2, p. 29—31.

[2] Felix Klein, Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, Leipzig 1882 = Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. XCIX, p. 499—573.

gearbeitet hat. Vielleicht hat Ihnen Hr. Brunel davon erzählt. Ich habe mich sodann in letzter Zeit mit den verschiedenen Existenzbeweisen beschäftigt, welche man an Stelle des Dirichlet'schen Prinzip's gesetzt hat, und habe mich überzeugt, dass die Methoden von Schwarz in den Berliner Monatsberichten, 1870, p. 767 ff. allerdings vollkommen ausreichen, um z. B. den allgemeinsten Satz zu beweisen, von dem ich gelegentlich im Sommer schrieb.

Hochachtungsvoll

F. Klein.

XI.

8 Décembre 1881
Paris
rue Gay-Lussac 66.

Monsieur,

Je vous remercie infiniment de l'offre obligeante que vous voulez bien me faire et je suis tout disposé à en profiter. Je vous enverrai prochainement la lettre que vous me demandez; je vous prierai pourtant de me dire quelle place vous pouver lui consacrer dans les Annales. Je sais que la clientèle de votre journal est nombreuse et que l'étendue que vous pouvez permettre à chaque travail est forcement limité et je ne voudrais pas abuser de votre bienveillance. Quand je saurai quelle longueur je puis donner à ma lettre, je vous l'écrirai immédiatement.

J'aurai prochainement l'honneur de vous envoyer diverses notes relatives à la théorie générale des fonctions, si vous voulez bien les accepter.

J'ai lu dernièrement le mémoire de Schwarz dans les Monatsberichte et ses démonstrations m'ont paru rigoureuses.

Veuillez agréer, Monsieur, mes remerciments et l'expression de ma grande considération,

Poincaré.

XII.

Leipzig 10. Dez. 1881.

Sehr geehrter Herr!

Es freut mich, dass meine Aufforderung Ihnen angenehm war: voilà une loi de réciprocité. Was nun Ihre Anfrage angeht, so will ich vor allen Dingen antworten, dass mir Ihr Aufsatz um so gelegener kommt, je *rascher* er kommt. Trifft er noch bis zum 20. dss. ein, so bringe ich ihn noch in das 4. Heft des eben erscheinenden 19. Annalenbandes; er wird dann bis Anfang März (spätestens) publiziert sein. Was nun den Umfang angeht, so will ich, da Sie es wünschen, etwa *einen Druckbogen* (16 Seiten) in Vorschlag bringen. Das ist Raum genug, um das Wesentliche deutlich zu sagen, und doch wieder auch für den flüchtigen Leser nicht zu viel. Ich möchte Sie dann bitten, namentlich auch über die *Methoden* Ihrer Beweise die erforderlichen Angaben zu machen, also über die Art, wie Sie die in Betracht kommenden Funktionen wirklich bilden, usw. Doch alles das beurtheilen Sie besser, als ich es hier vorschreiben könnte.

Noch Eins! Ist Ihre Adresse jetzt dauernd in Paris? Und wie ist die gegenwärtige Adresse von Picard? Ich würde glücklich sein, wenn ich auch vom letzteren einen Beitrag für die Annalen haben könnte.

Hochachtungsvoll

Ihr ergebener

F. Klein.

XIII.

Paris, le 17 Décembre 1881
rue Gay-Lussac 66.

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous adresser le petit travail en question[1]; je n'ai pas, comme vous me le demandiez, exposé succinctement mes méthodes de démonstration. Je n'aurais pu le faire sans dépasser de beaucoup les limites que vous m'aviez fixées. Je sais bien que ces limites n'avaient rien d'absolu. Mais d'un autre côté je ne crois pas qu'une démonstration puisse être résumée; on ne peut en retrancher sans lui enlever sa rigueur et une démonstration sans rigueur n'est pas une démonstration. Je préférerais donc vous adresser de temps en temps une série de courtes lettres où je démontrerais successivement les résultats énoncés où du moins les principaux. Ces lettres, vous en feriez ce que bon vous semblerait.

J'habite en effet Paris, je suis maître de conférences à la Faculté des Sciences.

Voici l'adresse de Picard:

Professeur Suppléant à la Faculté des Sciences, rue Michelet 13, Paris.

---

[1] Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires, Math. Annalen, t. 19 (1882), p. 553—564 = Œuvres de Henri Poincaré, Paris 1916, t. 2, p. 92—105.

Je vous donne par la même occasion celle d'Appell:

Maître de Conférences à l'Ecole Normale Supérieure,

rue Soufflot 22, Paris.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

POINCARÉ.

XIV.

Leipzig 13. Jan. 1882.

Sehr geehrter Herr!

Ich habe Ihnen noch nicht persönlich für die Übersendung Ihrer Arbeit gedankt, mit der Sie mich in der Tat in hohem Grade verpflichtet haben. — Wir sind jetzt so weit, dass in den allernächsten Tagen gedruckt wird. Sie werden eine Korrektur bekommen, die ich Sie bitte nach Durchsicht

„An die TEUBNER'sche Buchdruckerei

Leipzig“

zurückzuschicken. Wollen Sie dabei insbesondere auch die kurze Erklärung[1]

---

[1] Die vorstehend abgedruckte Arbeit des Herrn POINCARÉ resumirt gewisse Resultate, welche der Verfasser in einer Reihe aufeinanderfolgender Artikel in den Comptes rendus dieses Jahres mitgeteilt hat. Es wird kaum nöthig sein, dieselben der Beachtung der Mathematiker noch besonders zu empfehlen. Handelt es sich doch um Funktionen, welche geeignet scheinen, in der Lehre von den algebraischen Irrationalitäten den ABEL'schen Funktionen erfolgreichen Konkurrenz zu machen, und die überdies einen ganz neuen Einblick in diejenigen Abhängigkeiten gewähren, welche durch lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten bestimmt sind. Indem ich Herrn POINCARÉ im Namen der Annalenredaktion den besonderen Dank dafür ausspreche, dass er uns vorstehenden Aufsatz hat überlassen wollen, glaube ich ihm nur in dem Punkte entgegentreten zu sollen, dass ich die von ihm vorgeschlagene Benennung der in Betracht kommenden Funktionen als verfrüht bezeichne. Einmal nämlich bewegen sich alle die Untersuchungen, welche Hr. SCHWARZ und ich in der betreffenden Richtung bislang veröffentlicht haben, auf dem Gebiete der »fonctions fuchsiennes«, über die Hr. FUCHS selbst nirgends publiziert hat. Andererseits habe ich über die allgemeineren Funktionen, welche Hr. POINCARÉ mit meinem Namen in Verbindung bringt, von mir aus bisher nichts drucken lassen; ich habe nur gelegentlich Herrn POINCARÉ auf die Existenz dieser Funktionen aufmerksam gemacht (siehe Comptes rendus, t. 92 (1881), p. 1484). Letzterer Umstand ist aber um so irrelevanter, als sich ein spezieller Fall jener allgemeineren Funktionen bereits anderwärts bei Gelegenheit in Betracht gezogen findet, nämlich in der Arbeit von Hrn. SCHOTTKY im 83. Bande von BORCHARDT's Journal. Es werden dort (p. 346 ff.) Funktionen besprochen, welche sich symmetrisch reproduzieren, wenn man einen ebenen Bereich, der von lauter getrennten Kreislinien begrenzt ist, an eben diesen Kreislinien spiegelt. Übrigens möchte ich auch auf die DYCK'schen Arbeiten im 17. und 18. Bande dieser Annalen sowie insbesondere auf dessen demnächst (in Bd. XX) erscheinende Habilitationsschrift verweisen, wo Gebietseinteilungen der allgemeinsten hier in Betracht kommenden Art zu gruppentheoretischen Zwecken verwandt werden. — Vielleicht ist es gut, diesen kleinen Bemerkungen noch eine allgemeinere zuzugesellen und bei vorliegender Gelegenheit zu konstatieren, dass alle die hier in Frage kommenden Unter-

durchsehen, welche ich Ihrer Arbeit in dem früher bereits bezeichneten Sinne hinzugefügt habe, und in der ich, so viel an mir ist, gegen die beiden Benennungen „fuchsiennes" und „kleinéennes" protestire, bezüglich letzterer SCHOTTKY zitiere und übrigens RIEMANN als denjenigen bezeichne, auf den alle diese Untersuchungen zurückgehen. Ich habe mich bemüht, diese Erklärung so maßvoll als möglich zu halten, bitte Sie aber, mir umgehend zu schreiben, wenn Sie noch eine Abänderung wünschen. Dem Verdienste Ihrer Untersuchungen trete ich damit in keiner Weise zu nahe. — Hierüber hinaus habe ich nun aber noch eine eigene kleine Arbeit[1] redigirt, die gleich hinter der Ihrigen abgedruckt werden soll. Dieselbe bringt, auch ohne Beweis, einige auf dem betr. Gebiete liegende Resultate, vor allem dieses: *dass man jede algebraische Gleichung* $f(w, z) = 0$, *sobald man auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche p unabhängige Rückkehrschnitte gezogen hat, in einer und nur einer Weise durch* $w = \varphi(\eta)$, $z = \psi(\eta)$ *auflösen kann, wo* η *eine diskontinuierliche Gruppe von der Art erfährt, wie Sie sie damals im Anschluss an meinen Brief zur Sprache gebracht haben.* Dieser Satz ist darum so schön, weil diese Gruppe genau $3p-3$ wesentliche Parameter hat, also ebensoviele, als die Gleichungen des gegebenen *p Moduln* besitzen. Hieran knüpfen sich weitere Überlegungen, die mir interessant scheinen. Um Ihnen dieselben möglichst vollständig mitzuteilen, habe ich die Druckerei angewiesen, Ihnen auch von meiner Arbeit die Korrektur zuzuschicken, die Sie dann ruhig für sich behalten wollen.

Was die *Beweise* angeht, so ist das eine mühselige Sache. Ich operire immer mit RIEMANN'schen Anschauungen resp. „geometria situs". Das ist schwer ganz deutlich zu redigieren. Ich werde mir alle Mühe geben, dieses mit der Zeit zu tun. Mittlererweile wird es mir sehr erwünscht sein, mit Ihnen hierüber und auch über Ihre Beweise zu korrespondieren. Seien Sie überzeugt, dass ich die Briefe, welche Sie mir in dieser Hinsicht in Aussicht stellen, mit größtem Interesse studiren und dementsprechend eingehend beantworten werde. Wenn

---

suchungen, und zwar sowohl diejenigen, welche ein geometrisches Gepräge besitzen, als auch die mehr analytischen, die sich auf die Lösungen linearer Differentialgleichungen beziehen, auf RIEMANN'sche Ideenbildungen zurückgehen. Der Zusammenhang ist ein so enger, dass man behaupten kann, es handele sich bei Untersuchungen im Sinne des Hrn. POINCARÉ geradezu um die weitere Durchführung des allgemeinen funktionentheoretischen Programm's, welches RIEMANN in seiner Doktordissertation aufgestellt hat.

Leipzig, den 30. Dezember 1881.

F. KLEIN.

[1] Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich („Das Rückkehrschnitttheorem"), Math. Annalen, t. 19 (1882), p. 565—568 = FELIX KLEIN, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. CI, p. 622—626.

Sie wünschen, dieselben in irgend einer Form zu publizieren, so stehen Ihnen die Annalen selbstverständlich zur Verfügung.

Hochachtungsvoll

Ihr ergebener

F. KLEIN.

XV.

Monsieur,

J'ai reçu les épreuves de TEUBNER, et je vais les lui renvoyer. J'ai lu votre note et je ne vois pas qu'il y ait lieu d'y changer quoi que ce soit. Vous me permettrez cependant de vous adresser quelques lignes pour chercher à justifier mes dénominations. J'attends avec impatience le théorème que vous m'annoncez et qui me paraît des plus intéressants.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

POINCARÉ.

XVI.

Paris, 28 Mars 1882.

Monsieur,

Vous avez ajouté à mon travail:

„Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires,"

une note où vous exposez les raisons qui vous ont fait rejeter mes dénominations. Vous avez eu la bonté de m'en envoyer les épreuves imprimées en me demandant si j'y désirais quelque changement. Je vous remercie de la délicatesse de votre procédé, mais je ne pouvais en abuser pour vous demander de taire la moitié de votre pensée.

Vous comprenez cependant que je ne puis laisser les lecteurs des Annales sous cette impression que j'ai commis une injustice. C'est pourquoi je vous ai écrit, vous vous le rappelez peut-être, que je ne vous demandais aucun changement à votre note, mais que je vous demanderais la permission de vous adresser quelques lignes pour justifier mes dénominations.

Voici ces lignes[1]; peut-être jugerez-vous convenable de les insérer. A mon tour, je vous demanderai si vous désirez que je fasse quelque changement à la

[1] Lettre no. XVII.

rédaction de cette petite note. Je suis prêt à faire tous ceux qui n'altéreraient pas ma pensée.

Veuillez excuser mon importunité et me pardonner ce petit plaidoyer pro domo.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée

POINCARÉ.

Je vous serais obligé si vous voulez bien me dire l'adresse de M. HURWITZ à qui je désirerais faire hommage d'un exemplaire de mon travail.

Je vous serais bien reconnaissant aussi, si vous pouviez m'indiquer les traits généraux de la démonstration par laquelle vous établissez le théorème énoncé dans votre dernier travail:

Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich.

XVII.

Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires [1].

(Extrait d'une lettre adressée à M. F. KLEIN.)

Par

H. POINCARÉ à Paris.

..... Vous avez eu dernièrement la bonté de faire insérer aux Mathematische Annalen (t. XIX, p. 553—564) mon travail sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires et vous l'avez fait suivre d'une note où vous exposez les raisons qui vous font trouver peu convenables les noms que j'ai donnés a ces transcendantes. Permettez-moi de vous adresser quelques lignes pour défendre mes dénominations, que je n'ai pas choisies au hasard [2].

Si j'ai cru devoir donner aux fonctions nouvelles le nom de M. FUCHS, ce n'est pas que je méconnaisse la valeur des travaux de M. SCHWARZ et des vôtres, je suis le premier au contraire, à en apprécier la haute importance. Mais il ne m'était pas possible d'oublier les découvertes si remarquables que le savant pro-

[1] Cette lettre a été imprimée dans les Math. Annalen, t. 20 (1882), p. 52—53 et réimprimée dans les Œuvres de HENRI POINCARÉ, Paris 1916, t. 2, p. 106—107.

[2] Herrn POINCARÉ's Darlegungen habe ich zunächst nur die eine Bemerkung hinzuzufügen, daß ich für mein Teil nach wie vor an der Auffassung festhalte, der ich auf p. 564 des 19. Annalenbandes Ausdruck gegeben habe. Dabei will ich nicht unterlassen, ausdrücklich auf die Note auf merksam zu machen, mit welcher Hr. FUCHS von sich aus dem auf ihn bezüglichen Passus meiner Auseinandersetzung entgegengetreten ist (cf. Göttinger Nachrichten vom 4. März 1882).

Düsseldorf, den 2. April 1882.

F. KLEIN.

fesseur d'Heidelberg a publiées dans le Journal de Crelle. Elles sont le fondement de la théorie des équations linéaires et, sans elles, je n'aurais pu aborder l'étude de mes transcendantes qui se lient si directement à cette théorie. Dans ses premiers travaux, M. FUCHS se place, il est vrai, à un point de vue un peu différent du mien et ne se préoccupe ni de la discontinuité des groupes, ni de l'uniformité des fonctions. Mais M. SCHWARZ, dans ses Mémoires des tomes 70 et 74 du Journal de Crelle ne s'en préoccupe pas non plus; il en dit quelques mots dans un cas très particulier, dans le mémoire du tome 75 que j'ai cité dans ma note. C'est là seulement qu'il se trouve „Auf dem Gebiete der fonctions fuchsiennes". Dans vos belles recherches sur les fonctions modulaires votre façon d'envisager les choses différait peu de la mienne, mais vous aviez plutôt en vue alors l'étude des fonctions elliptiques que celle des équations linéaires. Quant à M. FUCHS, dans ses mémoires [1] des tomes 83 et 89 du Journal de Crelle, il s'est élevé à un point de vue nouveau et a mis en lumière le lien étroit qui unit la théorie des équations différentielles à celle de certaines fonctions uniformes. Ce fut la lecture de ces mémoires qui devint le point de départ de mes recherches [2].

En ce qui concerne les fonctions kleinéennes, j'aurais cru commettre une injustice, si je leur avais donné un autre nom que le vôtre. C'est M. SCHOTTKY qui a découvert la figure qui faisait l'objet de votre lettre, mais c'est vous qui avez „ihre prinzipielle Wichtigkeit betont"; comme vous dites à la fin de votre savant travail: „Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich".

Quant à ce que vous dites de RIEMANN, je ne puis qu'y souscrire pleinement. C'était un de ces génies qui renouvellent si bien la face de la Science qu'ils impriment leur cachet, non seulement sur les œuvres de leurs élèves immédiats, mais sur celles de tous leurs successeurs pendant une longue suite d'années. RIEMANN a créé une théorie nouvelle des fonctions, et il sera toujours possible d'y retrouver le germe de tout ce qui s'est fait et se fera après lui en analyse mathématique ....

Paris, le 30 Mars 1882.

---

[1] Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces, J. f. d. reine u. angewandte Math., t. 83 (1877), p. 13—37; Über eine Klasse von Funktionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten entstehen, ib., t. 89 (1880), p. 151—169 = L. FUCHS, Ges. math. Werke, Berlin 1906, t. 2, p. 87—114 et p. 191—212.

[2] Cf. la Correspondance de POINCARÉ et de FUCHS, Acta math. 38 (1921), p. 175—187. Voir aussi le mémoire de POINCARÉ que nous avons publié dans ce volume.

XVIII.

Düsseldorf, 3. April 1882.
Adr. Bahnstrasse 15.

Sehr geehrter Herr!

Ihre Zusendung, die ich gestern über Leipzig erhalten habe, traf mich eben im Begriffe, Ihnen zu schreiben, um nämlich meine neue Annalennote [1], die als Korrektur-Exemplar nun wohl bereits in Ihre Hände gekommen ist, mit ein paar Worten zu begleiten. Zugleich erhielt ich die Note von Prof. Fuchs [2] in den Göttinger Nachrichten. Wenn ich zunächst betreffs letzterer 2 Worte sagen darf, so wäre es diess, daß ich sie für ganz verfehlt bezeichnen muss. Ich habe nur behauptet, daß Fuchs nirgends über „fonctions fuchsiennes" publizirt habe. Hiernach ist die zweite der von ihm angezogenen Arbeiten (die ich mir übrigens zwecks näheren Studiums hierher kommen lassen werde) gegenstandslos. Die erste subsumiert sich allerdings unter die „fonctions fuchsiennes", insofern es sich um Modulfunktionen handelt, aber gerade den eigentlichen Charakter der letzteren, der in der Natur der singulären Linie liegt, hat Fuchs, bei seinem Mangel an geometrischer Anschauung, nicht richtig erkannt, wie bereits Dedekind in Bd. 83 von Borchardt hervorgehoben hat. Was endlich die Insinuation gegen Schluss der Note betrifft, als sei ich wesentlich durch Fuchs' eigene Untersuchungen zu meinen veranlasst worden, so ist das historisch einfach unrichtig. Meine Untersuchungen beginnen in 1874 mit der Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen. Im Jahre 1876 zeigte ich sodann, daß damit das von Fuchs damals aufgeworfene Problem, alle algebraisch integrierbaren linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung zu bestimmen, eo ipso erledigt sei. Die Sache ist also gerade umgekehrt, wie Fuchs angibt. Nicht seiner Arbeit entnahm ich die Ideen, sondern ich zeigte, daß sein Thema mit *meinen* Ideen behandelt werden müsse.

Mit Ihrer Darlegung bin ich, wie Sie vermuthen werden, auch nicht einverstanden. Wenn es sich um die allgemeine Werthschätzung der Fuchs'schen Arbeiten handelt, so werde ich gerne bereit sein, irgend eine *neue* Funktionenklasse, auf die noch niemand Hand gelegt hat, nach ihm zu benennen, oder auch z. B. die Funktionen mehrerer Variabeln, die Fuchs in Vorschlag bringt [3]. Die

[1] Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich („Das Grenzkreistheorem"), Math. Annalen, t. 20 (1882), p. 49—51 = Felix Klein, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. CII, p. 627—629.

[2] Über Funktionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1882, p. 81—84 = L. Fuchs, Ges. math. Abh., Berlin 1906, t. 2, p. 285—287.

[3] Sind dieselben wirklich *eindeutig?* Ich verstehe nur, daß sie in jedem Wertsysteme, welches sie erreichen, *unverzweigt* sind. Doch kann ich mich da täuschen.

Funktionen aber, welche Sie nach FUCHS benennen, gehörten bereits anderen, ehe Sie den Vorschlag zur Benennung machten. Ich bin auch überzeugt, daß Sie gerade diesen Vorschlag nicht gemacht hätten, wenn Sie damals (zu Anfang) die Literatur gekannt hätten. Sie bieten mir sodann, sozusagen zur Entschädigung, die „fonctions kleinéennes" an. So sehr ich Ihre freundliche Absicht dabei anerkenne, so wenig kann ich dies akzeptieren, weil es eben eine historische Unwahrheit impliziert. Wenn meine Arbeit im XIX. Bande so scheinen könnte, als hätte ich mich in der Tat jetzt besonders auf die „kleinéennes" geworfen, so mag die neue Arbeit in Bd. XX zeigen, daß ich nach wie vor auch die „fuchsiennes" als meine Domaine betrachte.

Doch genug davon. Ich habe Ihre Note umgehend in die Druckerei geschickt und nur die eine Bemerkung hinzu gefügt, dass ich für mein Theil an meiner früheren Darlegung festhalte (wobei ich zugleich das Publikum ausdrücklich auf die Note von Hrn. FUCHS aufmerksam mache). Sie werden in allernächster Zeit die Korrektur bekommen und bitte ich sodann, selbige mir hierher (wo ich mich während der Osterferien aufhalte) zuzuschicken, worauf ich in der Druckerei das Nöthige veranlassen werde[1]. Was die Stelle über SCHOTTKY angeht, so möchte ich Sie auf einen nachgelassenen Aufsatz in RIEMANN's Werken, p. 413, aufmerksam machen, wo genau entsprechende Ideen entwickelt sind. Es wird allerdings schwer sein, zu konstatieren, wie viel der Herausgeber, Hr. Prof. WEBER, da hineingetragen hat. RIEMANN's Werke erschienen 1876, SCHOTTKY's Dissertation 1875, später als Aufsatz im BORCHARDT'schen Journal 1877. Nun ist aber die Dissertation von 1875 nur ein Theil derjenigen von 1877 und ich kann aus dem Gedächtnisse nicht sagen, ob die eben hier in Betracht kommende Figur bereits in der Ausgabe von 1875 enthalten ist.

Noch muß ich hinzufügen, daß ich nicht beabsichtige, den Streit wegen der *Benennungen* (nachdem ich Ihrer Erklärung die oben bemerkte Fußnote hinzugefügt habe) von mir aus ferner fortzusetzen. Nur wenn ich erneut dazu veranlaßt werden sollte, würde ich eine, dann allerdings sehr ausführliche und sehr offenherzige Darstellung des ganzen Sachverhalt's geben. Lassen Sie uns lieber darin konkurrieren, wer von uns die ganze hier in Betracht kommende Theorie am meisten zu fördern geeignet ist! Ich meine, an meinem Teile durch meine neue Note einen gewissen Fortschritt erzielt zu haben. Eine Reihe von Theoremen über algebraische Funktionen beweist man vermöge der neuen η-Funktion sofort, z. B. den Satz, den ich in meiner Schrift über RIEMANN nur erst als wahrscheinlich bezeichnete, daß nämlich eine Fläche $p > 0$ niemals unendlich

[1] Ihre Note kommt unmittelbar hinter die meinige zu stehen!

viele *diskrete* eindeutige Transformationen in sich besitzen kann (vermöge deren sie in eine ∞ Zahl „äquivalenter Fundamentalpolygone" zerlegt erscheinen würde). — Dann ferner den Satz, daß sich verschiedene von PICARD gegebene Sätze von $p = 0$ auf den Fall eines beliebigen p übertragen usw.

Was die Methoden betrifft, durch die ich meine Sätze beweise, so schreibe ich davon, sobald ich dieselben noch mehr abgeklärt habe. Können Sie mir mittlerweile nicht mitteilen, welches die Ideen sind, die Sie eben jetzt verfolgen? Ich brauche kaum hinzuzufügen, daß wir in den Mathematischen Annalen jeden Beitrag, den Sie uns geben wollen, mit Freude abdrucken werden. Es wird mir sehr viel daran liegen, mit Ihnen in regem Verkehr zu bleiben. Für mich ist die lebendige Verbindung mit gleichstrebenden Mathematikern immer die Vorbedingung zur eigenen mathematischen Produktion gewesen.

Hochachtungsvoll

Ihr ergebener

F. KLEIN.

Die Adresse von Dr. HURWITZ ist bis auf weiteres: *Hildesheim,* Langer Hagen.

XIX.

Paris, 4 Avril 1882.

Monsieur,

Je viens de recevoir votre lettre et je m'empresse de vous répondre. Vous me dites que vous désirez clore un débat stérile pour la Science et je ne puis que vous féliciter de votre résolution. Je sais qu'elle ne doit pas vous coûter beaucoup puisque dans votre note ajoutée à ma dernière lettre, c'est vous qui dites le dernier mot, mais je vous en sais gré cependant. Quant à moi, je n'ai ouvert ce débat et je n'y suis entré que pour dire une fois et une seule mon opinion qu'il m'était impossible de taire. Ce n'est pas moi qui le prolongerai, et je ne prendrais de nouveau la parole que si j'y étais forcé; d'ailleurs je ne vois pas trop ce qui pourrait m'y forcer.

Si j'ai donné votre nom aux fonctions kleinéennes, c'est pour les raisons que j'ai dites et non pas comme vous l'insinuez, *zur Entschädigung;* car je n'ai à vous dédommager de rien; je ne reconnaîtrai un droit de propriété antérieur au mien que quand vous m'aurez montré que l'on a avant moi étudié la discontinuité des groupes et l'uniformité des fonctions dans un cas tant soit peu général et qu'on a donné de ces fonctions des développements en séries. Je réponds à une interrogation que je trouve en note à la fin d'une page de votre lettre. Parlant des fonctions définies par M. FUCHS au tome 89 de CRELLE, vous dites: Sind diese

Funktionen wirklich eindeutig? Ich verstehe nur daß sie in jedem Wertsysteme welches sie erreichen, unverzweigt sind. — Voici ma réponse, les fonctions étudiées par M. FUCHS se partagent en trois grandes classes; celles des deux premières sont effectivement uniformes; celles de la troisième ne sont en général que *unverzweigt;* elles ne sont uniformes que si on ajoute une condition à celles énoncées par M. FUCHS. Ces distinctions ne sont pas faites dans le premier travail de M. FUCHS; on les trouve dans deux notes additionnelles, malheureusement trop concises et insérées l'une au Journal de BORCHARDT 90, l'autre aux Göttinger Nachrichten 1880[1].

Je vous remercie beaucoup de votre dernière note[2] que vous avez eu la bonté de m'envoyer. Les résultats que vous énoncez m'interessent beaucoup, voici pourquoi; je les avais trouvés il y a déjà quelque temps, mais sans les publier parce que je désirais éclaircir un peu la démonstration; c'est pourquoi je désirerais connaître la vôtre quand vous l'aurez éclaircie de votre côté.

J'espère que la lutte, à armes courtoises, d'ailleurs, à laquelle nous venons de nous livrer à propos d'un nom, n'altérera pas nos bonnes relations. Dans tous les cas, ne vous en voulant nullement pour d'avoir pris l'offensive, j'espère que vous ne m'en voudrez pas non plus de m'être défendu. Il serait ridicule d'ailleurs, de nous disputer plus longtemps pour un nom, „Name ist Schall und Rauch" et après tout ça m'est égal, faites comme vous voudrez, je ferai comme je voudrai de mon côté.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

POINCARÉ.

XX.

Paris, 7 Avril 1882.

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous renvoyer corrigée l'épreuve de ma lettre[3]. Maintenant que ce petit débat est terminé et je l'espère pour ne plus se renouveler, permettez-moi de vous remercier de la courtoisie dont vous n'avez cessé de faire preuve pendant tout le temps qu'il a duré. Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

POINCARÉ.

---

[1] Voir aussi le mémoire de POINCARÉ imprimé dans ce volume p. 58 et la Correspondance de POINCARÉ et de FUCHS, Acta math. 38 (1921), p. 175—187.

[2] Über eindeutige Funktionen mit linearen Substitutionen in sich („Das Grenzkreistheorem"), Math. Annalen, t. 20 (1882), p. 49—51 = FELIX KLEIN, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. CII, p. 627—629.

[3] Lettre n° XVII.

XXI.

Leipzig, 7. Mai 1882.
Sophienstrasse 10.

Sehr geehrter Herr!

Vor kurzem las ich Ihre Note in den Comptes Rendus vom 10. April 1882 [1]. Dieselbe hat mich um so mehr interessiert, als ich glaube, daß Ihre jetzige Betrachtungen mit den meinigen auch der Methode nach eng verwandt sind. Ich beweise meine Sätze durch *Kontinuität*, indem ich die beiden Lemmata vorausstelle: 1) daß zu jeder „groupe discontinu" eine Riemann'sche Fläche zugehört und 2) daß zu der einzelnen zweckmäßig zerschnittenen Riemann'schen Fläche immer [2] nur *eine* solche Gruppe gehören kann (sofern ihr überhaupt eine Gruppe zugehört). Die Reihenentwicklungen, wie Sie dieselben aufstellen, habe ich bislang noch ganz außer Betracht gelassen. Wie beweisen Sie eigentlich die Existenz der Zahl m, für welche $\sum \frac{1}{(\gamma_i \eta + \delta_i)^m}$ absolut konvergiert? Und haben Sie für dieselbe eine *genaue* oder nur eine approximative untere Grenze?

Ich selbst habe mittlererweile den betr. Sätzen wieder allgemeinere Gestalt gegeben, und da die Fertigstellung einer Annalennote im Augenblicke, wo ich sehr wenig Zeit habe, sich noch etwas hinausziehen muß, so schreibe ich Ihnen wieder davon. Im Falle meines ersten Satzes wurde die Gesamtkugel η mit Ausnahme unendlich vieler *Punkte* von den wiedererhaltenen Reproduktionen des Fundamentalbereiches überdeckt. Im Falle des zweiten Satzes bleibt das Innere einer Kreisfläche, aber nur einer *einzigen*, unbedeckt. Ich habe jetzt die Existenz von Darstellungen konstatiert (die für die einzelne Riemann'sche Fläche wieder immer und immer auch nur in einer Weise vorhanden sind), bei welcher *unendlich viele Kreisflächen* ausgeschlossen werden. In dieser Richtung formuliere ich hier nur den allereinfachsten Satz (bei welchem durchaus unverzweigte Darstellung der Riemann'schen Fläche vorausgesetzt wird). Sei $p = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m$, wo vorab keines der $\mu = 1$ sein mag. So nehme man auf der Riemann'schen Fläche m Punkte $O_1, \ldots, O_m$, und lege von O_1 in der bekannten Weise $2\mu_1$ Querschnitte $A_1, B_1; A_2, B_2; \ldots A_{\mu_1}, B_{\mu_1}$; von O_2 $2\mu_2$ Querschnitte usw. Andererseits konstruiere man auf der η Kugel m auseinander liegende Kreise und innerhalb des von letzteren gemeinsam begrenzten Raumes ein Kreisbogenpolygon, das von $4\mu_1$ Kreisen begrenzt ist, welche auf dem ersten Fundamentalkreise senkrecht stehen, dann ferner von $4\mu_2$ Kreisen, die auf dem zweiten Fundamentalkreise

[1] Œuvres de Henri Poincaré, Paris 1916, t. 2, p. 41—43.

[2] D. h. unter den Beschränkungen des jeweiligen Satzes.

senkrecht stehen, usw. (also ein Kreisbogenpolygon, das m-fachen Zusammenhang hat). Die begrenzenden Kreise werden paarweise in der bekannten Reihenfolge $A_1, B_1, A_1^{-1}, B_1^{-1}, A_2, B_2, \ldots$ zusammengeordnet und zwar durch lineare Substitutionen des η, bei denen jeweils der betreffende Fundamentalkreis invariant bleibt. Überdies sei das Produkt der betreffenden linearen Substitutionen also etwa: $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_{\mu_1}^{-1} B_{\mu_1}^{-1}$ allemal der Identität gleich. *Dann gibt es immer eine und nur eine analytische Funktion, welche die zerschnittene Riemann'sche Fläche auf ein derart beschaffenes Kreisbogenpolygon abbildet.* — Der Fall, daß eines der μ gleich 1 wird, unterscheidet sich nur dadurch, daß dann der zugehörige Fundamentalkreis sich auf einen *Punkt* zusammenzieht und die entsprechenden linearen Substitutionen in diejenigen „parabolischen" übergehen, welche jenen Punkt festlassen [1]. — Doch genug für heute. Wäre es nicht möglich, eine vollständige Kollektion von Separatabzügen Ihrer einschlägigen Arbeiten zu bekommen? Wenn es angeht, beginne ich nach Pfingsten in meinem Seminare eine Reihe von Vorträgen über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich, und möchte dabei meinen Zuhörern eine solche Kollektion zur Verfügung stellen.

Hochachtungsvoll

Ihr

F. Klein.

XXII.

Paris, 12 Mai 1882.

Monsieur,

J'ai bien tardé à vous répondre et je vous prie de m'en excuser, car j'ai été forcé de faire une petite absence. Je crois comme vous que nos méthodes se rapprochent beaucoup et diffèrent moins par le principe général que par les détails. Pour les lemmes dont vous me parlez, le premier, je l'ai établi par les considérations des développements en séries et vous, à ce que je pense, à l'aide du théorème dont vous m'avez parlé dans une de vos lettres de l'année dernière. Pour le second lemme, il ne présente pas de difficulté et il est probable que nous l'établissons de la même manière. Une fois ces deux lemmes établis, et c'est en effet par là que je commence, ainsi que vous le faites vous même, j'emploie comme vous la *continuité*, mais il y a bien de manières de l'employer et il est possible que nous différions dans quelques détails.

---

[1] Vgl. Felix Klein, Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, Abschnitt IV („Das allgemeine Fundamentaltheorem"), Math. Annalen, t. 21 (1882/83), p. 206—212 = Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. CIII, p. 630—710.

Vous me demandez comment j'établis la convergence de la série $\sum \frac{1}{(\gamma_i \eta + \delta_i)^{2m}}$ J'en ai deux démonstrations mais qui sont toutes deux trop longues pour tenir dans une lettre; je les publierai prochainement[1]. La première est fondée en principe sur ce fait que la surface du cercle fondamental est finie. La seconde exige la même hypothèse, mais elle est fondée sur la géométrie non-euclidienne. Quelle est maintenant la limite inférieure du nombre m? C'est $m = 2$. Ici si l'on suppose m entier on a une limite exacte. En ce qui concerne les séries rélatives aux fonctions *Zétafuchsiennes,* je n'ai au contraire qu'une limite approximative. Ce qui m'a le plus intéressé dans votre lettre c'est ce que vous me dites au sujet des fonctions qui admettent comme espaces lacunaires une infinité de cercles. J'ai rencontré aussi de semblables fonctions et j'en ai donné un exemple dans une ou deux de mes notes. Mais j'y suis arrivé par une voie absolument différente de la vôtre. Il est probable que vos fonctions et les miennes doivent avoir une étroite parenté; cependant il n'est nullement évident qu'elles soient identiques. Je croirais volontiers que votre méthode ainsi que la mienne est susceptible d'une généralisation très étendue et qu'elles conduiraient toutes deux à une grande classe de transcendantes comprenant comme cas particuliers celles que nous avons déjà rencontrées.

Vous me parlez de tirages à part de mes travaux. Voulez-vous parler de mes notes des Comptes Rendus? Je n'en ai pas fait faire de tirages à part et il serait malheureusement difficile maintenant d'en obtenir, au moins pour les premières d'entre elles.

Je vous enverrai prochainement et dès que je les aurai reçus les tirages à part de deux travaux plus récents; le premier »sur les courbes définies par les équations différentielles«[2]. Il s'agit d'étudier la forme géométrique des courbes définies par les équations différentielles du 1er ordre. Malheureusement la première partie de ce mémoire est seule imprimée jusqu'ici et ne contient que les préliminaires. Le second travail a pour objet les formes cubiques ternaires, dont je veux faire l'étude arithmétique. J'ai voulu rappeler d'abord certains résultats algébriques qui remplissent la 1ère partie du mémoire. Cette 1ère partie a seule été imprimée dans le 50e cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique, le reste devant paraître dans le 51e cahier. Cette 1ère partie ne vous intéressera donc pas beaucoup. Il y a cependant une étude sur les transformations linéaires et sur certains groupes *continus* contenus dans le groupe linéaire à 3 et 4 variables.

---

[1] Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, Acta math., t. 1 (1882), p. 193—294 = Œuvres de HENRI POINCARÉ, Paris 1916, t. 2, p. 169—257.

[2] J. math. pures appliquées, sér. 3, t. 7 (1881), p. 375—422; ib. t. 8 (1882), p. 251—296.

A propos, je ne me souviens plus si je vous ai envoyé ma thèse, ainsi que des travaux plus anciens sur les équations différentielles et un travail sur les fonctions à espaces lacunaires.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

Poincaré.

XXIII.

Leipzig, 14. Mai 1882.

Sehr geehrter Herr!

In Beantwortung Ihres eben eintreffenden Briefes möchte ich Ihnen mit 2 Worten mitteilen, wie ich die „Kontinuität“ verwende. Freilich nur im Prinzip; denn die Ausführung im Einzelnen, die bei der Redaktion viel Mühe machen wird, läßt sich jedenfalls mannigfach modifizieren. Ich will mich auf den Fall der durchaus unverzweigten η-Funktion der zweiten Art, wie ich sie in meiner Note nannte, beschränken. Hier handelt es sich vor allem um den Nachweis, daß die beiden zu Vergleich kommenden Mannigfaltigkeiten: die Mannigfaltigkeit der in Betracht kommenden Substitutionssysteme und andererseits die Mannigfaltigkeit der überhaupt existirenden Riemann'schen Flächen, nicht nur dieselbe Dimensionenzahl ($6p-6$ reelle Dimensionen) besitzen, sondern daß sie auch *analytische* Mannigfaltigkeiten mit *analytischen* Grenzen sind (im Sinne der von Weierstrass eingeführten Terminologie). Diese beiden Mannigfaltigkeiten sind nun infolge des 1. in meinem vorigen Briefe angeführten Lemma's $(1-x)$-deutig auf einander bezogen, wo x dem 2. Lemma zufolge für die verschiedenen Partieen der zweiten Mannigfaltigkeit nur 0 oder 1 sein kann. Nun aber erweist sich jene Beziehung als eine *analytische* und zwar, wie wieder aus den beiden Hülfssätzen folgt, als eine analytische *von nirgends verschwindender Funktionaldeterminante*. Hieraus schließe ich, daß x durchweg 1 sein muss. Gäbe es nämlich einen Übergang von Gebieten mit $x = 0$ zu solchen mit $x = 1$, so würden den Punkten des Übergangsgebietes wegen des analytischen Charakters der Zuordnung bestimmte (wirklich erreichbare) Punkte der anderen Mannigfaltigkeit entsprechen und für diese müßte dann, dem Bemerkten zuwider, die Funktionaldeterminante der Beziehung verschwinden. So weit mein Beweis. Einen ganz anderen, doch auch auf Kontinuitätsbetrachtungen beruhenden, teilte mir Hr. Schwarz mit, als ich ihn neulich (am 11. April) in Göttingen besuchte. Ohne gerade von ihm autorisirt zu sein, meine ich Ihnen doch auch davon schreiben zu sollen. Schwarz denkt sich die Riemann'sche Fläche in geeigneter Weise zerschnitten, sodann unendlichfach überdeckt und die verschiedenen Überdeckungen in den Querschnitten so zusammengefügt, daß eine Gesamtfläche entsteht, welche der Gesamtheit der in der Ebene nebeneinander zu legenden Polygone entspricht. Diese Gesamtfläche ist, sofern man von solchen Attributen bei unendlich ausgedehnten Flächen sprechen kann (was eben erläutert werden muss), im Falle der η-Function 2. Art (auf die sich SCHWARZ zunächst beschränkte) *einfach zusammenhängend und einfach berandet*, und es handelt sich also nur darum, einzusehen, dass man auch eine solche einfach zusammenhängende, einfach berandete Fläche in der bekannten Weise auf das Innere eines Kreises abbilden kann. — Dieser SCHWARZ'sche Gedankengang ist jedenfalls sehr schön. —

Sie fragen wegen der Separatabzüge. Ich möchte Ihnen da vor allem natürlich nicht lästig fallen, und dies um so weniger, als ich mir ja alle Ihre Publikationen, mit alleiniger Ausnahme Ihrer Thèse, immer verschaffen kann. Aber lieb wäre mich freilich, eine möglichst vollständige Sammlung derselben zu haben. Wenn Sie mir also einige Sachen zuschicken können (ich besitze noch keine derselben), so wird es mir sehr angenehm sein.

Haben Sie vielleicht einmal LIE's Theorie der Transformationsgruppen gelesen? LIE denkt sich die in seine Gruppen eingehenden Parameter immer als komplexe Grössen; es wäre interessant zu sehen, wie sich seine Resultate vervollständigen ließen, wenn man auch solche Gruppen in Betracht zöge, die nur durch *reelle* Wiederholung gewisser ∞ kleiner Operationen entstehen.

HERMITE schickte mir vor längerer Zeit eine Nummer seines lithographierten Cours d'Analyse. Wäre es vielleicht möglich (natürlich gegen Bezahlung) das Ganze zu bekommen? Ich würde das für mein Seminar in Anbetracht der Zwecke, die ich eben jetzt verfolge, mit besonderer Freude begrüßen.

Wie immer

Ihr ergebenster

F. KLEIN.

XXIV.

Paris, 18 Mai 1882.

Monsieur,

Je n'ai pas besoin de vous dire combien votre dernière lettre m'a intéressé. Je vois clairement maintenant que votre démonstration et la mienne ne peuvent différer que par la terminologie et par des détails; ainsi il est probable que nous n'établissons pas de la même manière le caractère analytique de la relation qui lie les deux *Mannigfaltigkeiten* dont vous parlez; pour moi, je relie ce fait à la convergence de mes séries, mais il est évident qu'on peut arriver au même résultat sans passer par cette considération.

Les idées de M. Schwarz ont une portée bien plus grande; il est clair que le théorème général en question, s'il était démontré, aurait son application dans la théorie d'un très grand nombres de fonctions et en particulier dans celle des fonctions définies par des équations différentielles *non linéaires.* C'est en étudiant de pareilles équations que j'avais été conduit de mon côté à chercher si une surface de Riemann à une infinité de feuillets pouvait être étendue sur un cercle, et j'avais été amené au problème suivant, qui permettrait de démontrer la possibilité de cette extension:

On donne une équation au différences partielles

$$X_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + X_2 \frac{d^2 u}{dx\,dy} + X_3 \frac{d^2 u}{dy^2} + X_4 \frac{du}{dx} + X_5 \frac{du}{dy} = 0$$

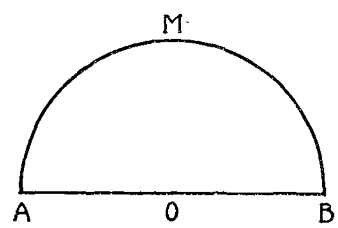


Figure 4.

et une demi-circonférence $AMBO$. X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont des fonctions données de x et de y; ces fonctions sont analytiques à l'intérieur de la demi-circonférence et cessent de l'être sur son périmètre. Peut-on trouver toujours une fonction u de x et de y satisfaisant à l'équation, analytique à l'intérieur de la demi-circonférence, tendant vers 1 quand le point x, y se rapproche de la demi-circonférence et vers 0 quand il se rapproche du diamètre AOB? Tous mes efforts dans ce sens ont été jusqu'ici infructueux, mais j'espère que M. Schwarz qui a si bien résolu le problème dans le cas plus simple, sera plus heureux que moi.

Je vous envoie les tirages à part de mes travaux anciens, et j'espère pouvoir vous adresser d'ici peu les autres mémoires plus récents que je vous ai annoncés et dont je ne saurais tarder à recevoir le tirage à part.

Quant au cours lithographié de M. Hermite il est édité chez Hermann, Librairie des Lycées, rue de la Sorbonne; le prix de l'abonnement est 12 Francs. Je ne crois pas que l'éditeur envoie de tirage à part à M. Hermite.

Veuillez agréer l'assurance de mes sentiments les plus dévoués et de mon estime sincère,

Poincaré.

XXV.

Leipzig, den 19. Sept. 82.
Sophienstr. 10/II.

Sehr geehrter Herr!

Im Begriffe, meinerseits eine längere Arbeit über die neuen Funktionen abzuschließen, habe ich soeben Ihren Aufsatz in Bd. 19 der Annalen noch einmal durchgesehen. Es ist da ein Punkt, den ich nicht verstehe. Sie sprechen an zwei

Stellen (pag. 558 Mitte und pag. 560 unten) von „fonctions fuchsiennes", die nur in einem Raume existiren, der von unendlich vielen Kreisen begrenzt ist, welche auf dem Hauptkreise senkrecht stehen. Nun kenne ich sehr wohl solche Funktionen (wie ich Ihnen schon vor einem Vierteljahr schrieb), die unendlich viele Kreise als natürliche Grenze haben. Aber an der zugehörigen Gruppe partizipieren immer solche Substitutionen, welche nur den einzelnen, beliebig herausgegriffenen Begrenzungskreis invariant lassen. Nun definiren Sie „fuchsiennes" als solche Funktionen, deren Substitutionen *sämmtlich* reell sind (pag. 552), und diese Definition wird durch die Verallgemeinerung auf pag. 557, wo an Stelle der reellen Axe ein beliebiger Kreis tritt, nicht wesentlich modifiziert. Die von mir gekannten Funktionen fallen also nicht unter Ihre Definition der „fuchsiennes". Ist da ein Mißverständnis auf meiner Seite oder eine Ungenauigkeit des Ausdruck's auf der Ihrigen?[1] Was meine Arbeit angeht, so beschränke ich mich darauf, die geometrische Auffassung darzulegen, vermöge deren ich im RIEMANN'schen Sinne die neuen Funktionen definiert denke. Dabei sind, wie es in der Natur der Sache liegt, viele Berührungspunkte auch mit Ihrer geometrischen Auffassung des Gegenstandes. Die allgemeinste Gruppe, welche ich in Betracht ziehe, erzeuge ich aus einer beliebigen Zahl „isolierter" Substitutionen und aus einer Anzahl von Gruppen „mit Hauptkreis" (der reell oder imaginär sein kann oder auch in einen Punkt ausgeartet) durch „Ineinanderschiebung". Die Theoreme meiner beiden Annalennoten subsumieren sich dann als spezielle Fälle unter einen allgemeinen Satz, der etwa so lautet: *daß zu jeder Riemannschen Fläche mit beliebig vorgegebener Verzweigung und Zerschneidung immer eine und nur eine η-Funktion des betreffenden Typus zugehört.*

Von MITTAG-LEFFLER hörte ich, dass Sie eben auch mit größeren Ausarbeitungen[2] beschäftigt sind. Ich brauche nicht zu sagen, wie sehr es mich interessiren wird, darüber Genaueres zu erfahren. Wenn Sie in einem Monate in Paris sind, werden Sie meinen Freund S. LIE kennen lernen, der eben ein paar Tage bei mir zu Besuch war und der, obwohl selbst bislang nicht Funktionentheoretiker, doch lebhaft sich für die Fortschritte interessiert, die die Funktionentheorie in neuerer Zeit gemacht hat.

Hochachtungsvoll
Ihr
F. KLEIN.

---

[1] Cf. Über den Begriff des funktionentheoretischen Fundamentalbereichs, Math. Annalen, t. 40 (1892), p. 130—139 = FELIX KLEIN, Ges. math. Abh., Berlin 1923, t. 3, Nr. CIV, p. 711—720.

[2] Il s'agit ici des cinq mémoires suivants: Théorie des groupes fuchsiens, Acta math., t. 1 (1882), p. 1—62. Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, ib. t. 1 (1882), p. 193—294. Mémoire sur les

XXVI.

Nancy, le 22 Septembre 1882.

Monsieur,

Voici quelques détails sur ces fonctions dont j'ai parlé dans ma note des *Annalen* et dont la limite naturelle est formée d'une infinité de cercles. Pour plus de simplicité dans l'exposition, je prendrai pour exemple un cas très-particulier. Supposons quatre points a, b, c, d sur le cercle fondamental et quatre cercles coupant orthogonalement celui-ci: le 1^er^ en a et en b, le 2^d^ en b et en c; le 3^e^ en c et en d; le 4^e^ en d et en a. On obtient ainsi un quadrilatère curviligne. Considérons deux substitutions (hyperboliques ou paraboliques) la 1^ère^ changeant le cercle ab dans le cercle ad; la 2^d^ changeant le cercle cb dans le cercle cd. Les „Wiederholungen" de notre quadrilatère vont recouvrir la surface du cercle fondamental, ou une portion seulement de cette surface; mais dans tous les cas le groupe sera évidemment discontinu. On reconnaît aisément que le cercle fondamental ne sera recouvert tout entier que dans un seul cas; lorsque les quatre points $abcd$ seront harmoniques et que les deux substitutions (ab, ad) et (cb, cd) seront paraboliques. On a affaire alors à la fonction modulaire. Dans tous les autres cas, on trouve que les „Wiederholungen" en question ne recouvrent qu'un domaine limité par une infinité de cercles. Maintenant le plan tout entier peut être „abgebildet" sur notre quadrilatère et de telle façon que deux points *correspondants* du périmètre correspondent au même point du plan. Cette „Abbildung" définit une fonction n'existant que dans le domaine recouvert par les „Wiederholungen". Mais ici il faut faire une remarque importante. Le groupe dérivé des deux substitutions (ab, ad) et (cb, cd) peut être considéré comme engendré d'une autre manière. Considérons quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 coupant tous quatre orthogonalement le cercle fondamental et ne se coupant pas entre eux de façon à être extérieurs les uns aux autres. Soit deux substitutions changeant C_1 en C_2 et C_3 en C_4; le groupe qui en dérive est évidemment discontinu et si les quatre cercles sont convenablement choisis, il peut être identique au groupe dont il a été question plus haut. La portion du plan extérieure aux quatre cercles est une sorte de quadrilatère qui peut être „abgebildet" sur une surface de Riemann de genre 2 et qui engendre ainsi une fonction existant dans tout le plan. Voilà donc le même groupe donnant naissance à deux fonctions essentiellement différentes. On peut se poser à ce sujet une foule de questions délicates que je ne puis aborder ici.

groupes kleinéens, ib. t. 3 (1883), p. 49—92. Sur les groupes des équations linéaires, ib. t. 4 (1884), p. 201—311. Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes, ib. t. 5 (1884), p. 209—278 = Œuvres de Henri Poincaré, Paris 1916, t. 2, p. 108—462.

En résumé, vous voyez qu'il s'agit bien de fonctions n'existant que dans un domaine limité par une infinité de cercles et cependant de „fonctions fuchsiennes" puisque toutes les substitutions du groupe conservent le cercle fondamental. Chacun des cercles de la frontière est conservé par une des substitutions du groupe, laquelle conserve en même temps le cercle fondamental. Vous savez en effet que toute substitution hyperbolique conserve tous les cercles qui passent par les deux points doubles.

J'apprends avec plaisir que vous préparez un grand travail sur l'objet qui nous intéresse tous deux. Je le lirai avec le plus grand plaisir. Comme vous l'a dit M. Mittag-Leffler je prépare moi-même un travail sur ce sujet; mais vu sa longueur, je l'ai partagé en cinq mémoires;

le 1^er^ qui va paraître cette année, sur les groupes à substitutions réelles, (que j'ai appelés groupes fuchsiens);

le 2^d^ sur les fonctions fuchsiennes; j'en acheverai prochainement la rédaction;

le 3^e^ sur les groupes et fonctions plus générales que j'ai appelées kleinéennes.

Dans le 4^e^ j'aborderai un ordre de questions que j'ai laissées de côté dans le deuxième mémoire; c'est à dire la démonstration de l'existence de fonctions satisfaisant à certaines conditions, par exemple la démonstration de ce fait qu'à toute surface de Riemann correspond une semblable fonction et la détermination des constantes correspondantes.

Enfin dans le 5^e^ je parlerai des fonctions zétafuchsiennes et de l'intégration des équations linéaires.

Je dois retourner à Paris après-demain; je serai donc là au moment du passage de M. Lie. Je serais désolé de perdre l'occasion de voir ce célèbre géomètre. Vous avez dû recevoir la première partie de mon travail sur les courbes définies par les équations différentielles. Je vous en enverrai prochainement le seconde partie; je vous enverrai en même temps mon mémoire sur les formes cubiques.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

Poincaré.